

DM 11

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n .
 - (b) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
 - (c) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
 - (d) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
 - (e) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.

(b) Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 2

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent \mathbb{R} :

$$E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$,

1. Expliciter A et B .
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base.
3. On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ et $H = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$
 - a. Montrer que $F = \text{Vect}(X_1)$ où X_1 est un vecteur non nul que l'on déterminera.
 - b. Montrer que $F = \text{Vect}(X_2)$ où X_2 est un vecteur non nul que l'on déterminera.
 - c. Montrer que $F = \text{Vect}(X_3)$ où X_3 est un vecteur non nul que l'on déterminera.
 - d. Montrer que la famille (X_1, X_2, X_3) est libre.
 - e. En déduire que :

$$F \oplus G \oplus H = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$