Exercice 6 (**)

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

3. $\ln(x_n) = o(x_n)$

Car : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{X = x_n}{=} \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par crois. comp.

Donc $x_n + \ln(x_n) \sim x_n$

Or $x_n + \ln(x_n) = n$

Donc $n \sim x_n$

D'où $\boxed{x_n \sim n}$

$\left| f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} \right|$

Exercice 12

Le but de cet exercice est de déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

$n+1$

x^2

Exercice 12

Le but de cet exercice est de déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{ex^2}{2}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right| \leq \frac{e}{2n}$. Conclure.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \times n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n}$$

$f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1}$$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on a $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$

On a alors $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

Donc $S_n \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \underbrace{\dfrac{1}{t+1}}_{\frac{u'}{u}}\,dt = \left[\ln|1+t|\right]_0^1$

$= \ln|2| - \ln|1|$

$= \ln 2$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n} = \ln 2}$

Soit $x \in [0,1]$.

2. On va appliquer l'inégalité de T-L à la fonction $f(t) = e^t$ entre 0 et x à l'ordre 1.

Brouillon

Rappel : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k \right| \leqslant \dfrac{M |x|^{n+1}}{(n+1)!}$ donne l'ordre

Si $n+1$ est pair $|x|^{n+1} = x^{n+1}$.

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^2([0,x])$

$\left| f(x) - \left(f(0) + f'(0)\,x \right) \right| \leqslant \dfrac{M |x|^2}{2}$ où M est un majorant $|f^{(2)}(t)|$ sur $[0,x]$.

$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(t) = e^t$

$|f''(t)| = |e^t| = e^t \leftarrow$ On cherche un majorant de e^t pour $t \in [0,x]$.

Si $0 \leqslant t \leqslant x$

alors $e^0 \leqslant \underline{\underline{e^t \leqslant e^x}}$ exp

Donc $e^t \leqslant e^x \leqslant e^1 = e$

car $x \leqslant 1$

Donc on pose $M = e$

BROUILLON

$|e^x - 1 - x| \leq \frac{ex^2}{2}$

$\frac{M|x|^2}{2!}$

$|x|^2 = |x^2| = x^2$

$|x|^3 = |x^3|$

$\frac{M|x|^2}{2} = \frac{Mx^2}{2}$) $\boxed{M = e}$

On a donc :

$$\left| e^x - (1 + x) \right| \leqslant \frac{e|x|^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{e\,x^2}{2}}$$

$$\left|e^x - 1 - x\right| \leqslant \frac{e^x \, |x|^2}{2} \leqslant \frac{e\,x^2}{2}$$ car $e^x \leqslant e$

car $x \leqslant 1$.

3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right| \leq \frac{e}{2n}$. Conclure.

On a, pour tout $x \in [0,1]$ $\left|e^x - 1 - x\right| \leqslant \frac{e\,x^2}{2}$.

On applique cette inégalité avec $x = \frac{1}{k+n}$ où $k \in [\![1,n]\!]$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a bien $\frac{1}{k+n} \in [0,1]$.

$$\left|e^{\frac{1}{k+n}} - 1 - \frac{1}{k+n}\right| \leqslant \frac{e\left(\frac{1}{k+n}\right)^2}{2}$$

Donc $$\sum_{k=1}^{n}\left|e^{\frac{1}{k+n}} - 1 - \frac{1}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e\left(\frac{1}{k+n}\right)^2}{2}$$

Or

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k+n}} - 1 - \frac{1}{k+n}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|e^{\frac{1}{k+n}} - 1 - \frac{1}{k+n}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e \times \left(\frac{1}{k+n}\right)^2}{2}$$

On pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k+n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (car $k+n \geqslant n$)

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \leqslant \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

somme constant.

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{e\left(\frac{1}{k+n}\right)^2}{2} \leqslant \frac{e}{2}\,\frac{1}{n^2} \times n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{e\left(\frac{1}{k+n}\right)^2}{2} \leqslant \frac{e}{2n}.$$

D'où le résultat.