Chapitre 18

Somme de sous-espaces vectoriels.
Espaces vectoriels de dimension finie

Table des matières

1 Somme de sous-espaces vectoriels - espaces vectoriels supplémentaires **3**
- 1.1 Somme de sous-espaces vectoriels . . . 3
  - 1.1.1 Définition et premières propriétés . . . 3
  - 1.1.2 Famille génératrice d'une somme . . . 5
- 1.2 Somme directe . . . 5
  - 1.2.1 Définition . . . 5
  - 1.2.2 Caractérisation d'une somme directe . . . 6
  - 1.2.3 Le raisonnement par analyse-synthèse pour prouver qu'une somme est directe. . . . 6
  - 1.2.4 Sous-espaces supplémentaires . . . 7

2 Espaces vectoriels de dimension finie **8**
- 2.1 Notion de dimension . . . 8
  - 2.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie . . . 8
  - 2.1.2 Théorème de la dimension et notion de dimension . . . 9
  - 2.1.3 Familles libres, génératrices en dimension n . . . 10
  - 2.1.4 Un dernier résultat à connaître : Base de Taylor $\mathbb{R}_n[X]$ . . . 11
- 2.2 Sous-espaces vectoriels . . . 11
- 2.3 Rang d'une famille de vecteurs . . . 12
  - 2.3.1 Rang d'une famille finie de vecteurs . . . 12
  - 2.3.2 Déterminer le rang d'une famille de vecteur en pratique . . . 12

3 Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie **13**
- 3.1 Dimension d'une somme en dimension finie . . . 13
- 3.2 Somme directe et dimension (en dimension finie) . . . 13
- 3.3 Espaces supplémentaires en dimension finie . . . 14
  - 3.3.1 Cas de deux sous-espaces . . . 14
  - 3.3.2 Généralisation à p sous-espace vectoriel . . . 15

4 Preuves et solutions **16**
- 4.1 Preuves . . . 16
- 4.2 Solutions . . . 20

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au singleton $\{0_E\}$.

1 Somme de sous-espaces vectoriels - espaces vectoriels supplémentaires

1.1 Somme de sous-espaces vectoriels

1.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. (Somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble

$$F+G=\{v+w,\ v\in F, w\in G\}$$

Remarque. A retenir

$u\in F+G$ se traduit donc par : $u=u_1+u_2$ avec $u_1\in F$ et $u_2\in G$.

Attention ! $F+G$ est donc un ensemble. On va voir ci-dessous que c'est même un sous-espace vectoriel. Mais $F+G$ n'est pas un vecteur ! ! !

Remarque. On ne peut donc parler que de somme de deux **sous**-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de référence. Si on dit somme de deux espaces vectoriels, cela sous-entend que ces deux espaces vectoriels sont des **sous**-espaces vectoriels d'un même espace E.

Exemple 1. Posons : $F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | 3x-y=0\Big\}$ et $G=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=0\Big\}$.
On a, par exemple $v=(1,3,4)\in F$ et $w=(1,1,2)\in G$. Donc $v+w=(2,4,6)\in F+G$.
On a encore $v'=(2,6,-1)\in F$ et $w'=(3,0,3)\in G$. Donc $v'+w'=(5,6,2)\in F+G$.

Exercice de cours 1. (*Voir la correction*)
Posons :

$$F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=0\Big\} \text{ et } G=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | z=0\Big\}.$$

1. Prouver que $(1,1,1)\in F+G$.
2. Donner deux autres vecteurs de $F+G$.

Remarque. Il n'y a pas toujours unicité de l'écriture d'un vecteur en somme de deux vecteurs. Si on reprend l'exemple ci-dessus, le vecteur $(1,1,1)$ peut se décomposer d'une infinité de façon comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Voici deux décompositions possibles :

$$(1,1,1)=\underbrace{(0,1,1)}_{\in F}+\underbrace{(1,0,0)}_{\in G}=\underbrace{(1,0,1)}_{\in F}+\underbrace{(0,1,0)}_{\in G}.$$

Proposition 1. (Une somme de deux sev ~~et~~ est un sev) (*Voir la preuve*)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E,

$$F + G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Proposition 2. ($F + G$ est l'ensemble des CL des éléments de F et G) (*Voir la preuve*)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E,

$$F + G \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de } F \text{ et } G$$

Exemple 2. Si on reprend l'exemple 1, on a vu que $(2,4,6) \in F+G$ et $(5,6,2) \in F+G$. On en déduit que toute CL de ces deux vecteurs appartient à $F+G$. Par exemple $3(2,4,6)-2(5,6,2) = (-4,0,14) \in F+G$.

Exemple 2' : $u=(0,1,1) \in F$, $v=(1,0,0) \in G \Longrightarrow \underbrace{(0,3,3)-(4,0,0)}_{\text{CL de } u \text{ et } v.} \in F+G$

Proposition 3. ($F + G$ et le plus petit sev contenant F et G) (*Voir la preuve*)
Soit F,G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

$$\text{Si } \begin{cases} F \subset H \\ \text{et} \\ G \subset H \end{cases} \quad \text{alors } F + G \subset H.$$

Autrement dit : *$F + G$ et le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G*

Remarque. Il faut bien avoir en tête que $F \subset F + G$. En effet, tout vecteur$u$ de F s'écrit $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$.

(et de même, on a $G \subset F + G$)

La définition d'un somme d'espace vectoriel s'étend à plus de 2 sous-espaces vectoriels comme suit :

Définition 2. (Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace E. On appelle somme des F_i l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_p, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \ldots, x_p \in F_p\}$$

Nous admettrons que **c'est un sous-espace vectoriel de E.**

Ainsi $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est l'ensemble des vecteurs que l'on peut écrire sous la forme $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ avec $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \ldots, x_p \in F_p$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments des F_i.

1.1.2 Famille génératrice d'une somme

Proposition 4. (Somme de deux sev dont on a des familles génératrices) (*Voir la preuve*)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E et $\mathcal{F}_1$ une famille génératrice de F et $\mathcal{F}_2$ une famille génératrice de G (et donc $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)$).
Alors

$$F + G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2).$$

Autrement dit : *On obtient une famille génératrice de $F+G$ en concaténant une famille génératrice de F et une famille génératrice de G.*

Exercice de cours 2. (*Voir la correction*)
On pose $E_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,1)\right)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0)\right)$.

1. Donner une famille génératrice de $E_1 + E_2$.
2. Montrer que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$.

1.2 Somme directe

1.2.1 Définition

Définition 3. (Somme directe)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $F+G$ est directe et on note $F \oplus G$, si tout vecteur z de $F+G$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.
On dit aussi que "F et G **sont en somme directe**"

Remarque. La notation $F \oplus G$ dit donc deux choses à la fois : elle désigne la somme de F et G et elle dit en même temps que cette somme est directe.

Exemple 3. On a vu dans l'exercice 1 que le vecteur $(1,1,1)$ pouvait s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc la somme $F+G$ n'était pas directe dans cet exercice.

Définition 4. (Somme directe de p sous-espaces vectoriels)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe et on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$ leur somme, si tout vecteur $x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ s'écrit **de manière unique** comme somme $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ avec $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2, \ldots x_p \in F_p$.

Remarque.

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p \text{ se note aussi } \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$$

1. $((1,0,1),(0,1,1))$ est fam. gen. de $E1$.

$((1,0,0),(0,1,0))$ " " " " E_2

Donc $((1,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0))$ est une f.g. de E_1+E_2.

1.2.2 Caractérisation d'une somme directe

Proposition 5. (Caractérisation d'une somme directe par l'intersection) (*Voir la preuve*)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

La somme $F+G$ est directe si et seulement si $\underline{F \cap G} = \{0\}$.

Proposition 5' : l'intersection de 2 sevs est toujours un sev. (⚠ Pas l'union)

Exercice de cours 3. (*Voir la correction*)
On admet que les ensembles F et G ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4x+2y-3z=0\right\} \text{ et } G = \left\{(2t,-3t,t) | t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que F et G sont en somme directe.

1.2.3 Le raisonnement par analyse-synthèse pour prouver qu'une somme est directe.

L'exercice suivant permet de se familiariser avec un certain type de raisonnement dit **par analyse-synthèse**. C'est un raisonnement qui est souvent utilisé pour prouver l'existence et l'unicité d'un objet mathématique.
Mais dans la plupart des cas, on prouvera qu'un somme est directe de façon plus simple (voir la section suivante).

Exercice de cours 4. (*Voir la correction*)
Prouver les deux assertions suivantes, où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques réelles d'ordre n. Pour ces deux questions, vous utiliserez la méthode d'analyse-synthèse décrite ci-dessous.

1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$. On admet que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$. Montrer que :
$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

Indication : ***méthode d'analyse-synthèse illustrée sur la question 1***

Le but est de la question 1 est de prouver toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme : $M = S + A$ où $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, qu'il existe un unique couple (S,A) avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

- ***Etape 1 - Analyse :*** *Supposer qu'un tel couple existe et en déduire une expression de S et A en fonction de M. Cela prouvera que si le couple (S,A) existe, alors il est unique.*
- ***Etape 2 - Synthèse :*** *Vérifier que si on prend S et A comme trouvées à l'étape 1, elles vérifient bien ce que l'on veut, c'est-à-dire : $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M = S + A$.*

Exercice de cours 3. (*Voir la correction*)
On admet que les ensembles F et G ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x + 2y - 3z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(2t, -3t, t) | t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que F et G sont en somme directe.

On va montrer que $F \cap G = \{0\}$
$(0,0,0)$

Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. Montrons que $u = (0, 0, 0)$.

$u \in F \cap G \iff u \in F$ et $u \in G$

$\iff 4x + 2y - 3z = 0$ et $u = (\underbrace{2t}_{x}, \underbrace{-3t}_{y}, \underbrace{t}_{z})$ où $t \in \mathbb{R}$.

On a alors

$$4(2t) + 2(-3t) - 3t = 0$$
$$\iff 8t - 6t - 3t = 0$$
$$\iff -t = 0$$
$$\iff t = 0$$

Donc $u = (0, 0, 0)$

Donc $F \cap G = \{0\}$ donc la somme $F + G$ est directe
$(F + G = F \oplus G)$

Rem : $v = (1, -2, 0) \in F$ $w = (2, -3, 1) \in G$.

$u = v + w = (3, -5, 1) \in F \oplus G$

il n'y a pas d'autre décompo de u comme elt de F + elt de G.

1.2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5. (Sous-espaces supplémentaires)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E si $E = F \oplus G$.

Autrement dit : *F et G sont supplémentaires dans E si tout vecteur de E se décompose de façon unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Remarque. On dit que G est **un** supplémentaire de F et réciproquement. Un supplémentaire n'est jamais unique.

Exemple 4. Dans l'exercice de cours 4, on a montré que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6. (Caractérisation de $E = F \oplus G$) (*Voir la preuve*)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E,

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Notion de dimension

On définit la notion d'*espace vectoriel de dimension finie* avant même de donner une définition au terme de dimension. C'est une construction qui peut surprendre, mais qui permet d'introduire rigoureusement, dans un second temps, la notion de dimension.

2.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 6. (Espace vectoriel de dimension finie)
Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** lorsqu'il admet une **famille génératrice finie** (c'est-à-dire une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments).
Sinon on dit que c'est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 5.

- $\mathbb{R}^3$ admet comme famille génératrice $(e_1,\ e_2\ e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$. C'est une famille génératrice finie, donc $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension finie.
- $\mathbb{R}_3[X]$ admet comme famille génératrice $(X^3, X^2, X, 1)$ qui est une famille finie, donc $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie.
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet comme famille génératrice $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ avec
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
C'est une famille finie donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 7. (evdf de référence)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Nous ne prouverons pas cette proposition mais la preuve est immédiate et basée sur la même idée que l'exemple ci-dessus.

Exercice de cours 5. (*Voir la correction*)
Montrer (par l'absurde) que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

2.1.2 Théorème de la dimension et notion de dimension

Dans cette partie, on va montrer que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments. On a besoin pour cela des des premiers théorèmes ci-dessous qui sont utiles également en eux-mêmes pour les exercices et qu'il faudra retenir.

Théorème 8. (Théorème de la base extraite) (*Voir la preuve*)
Si E admet une famille génératrice finie $(x_1, \dots, x_n)$, alors il existe une base de E constituée de vecteurs de $(x_1, \dots, x_n)$.
(En résumé : *De toute famille génératrice finie, on peut extraire une base*)

Théorème 9. (famille plus grande qu'une famille génératrice) (*Voir la preuve*)

Une famille ayant plus d'éléments qu'une famille génératrice est liée.

ou encore :

Une famille ayant moins d'éléments qu'une famille libre n'est pas génératrice.

Théorème 10. (Théorème de la dimension) (*Voir la preuve*)

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Définition 7. (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On appelle dimension de E le nombre d'éléments de toute base de E.

(*d'après le théorème précédent, ce nombre ne dépend pas de la base choisie*).
Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

Remarque. (Dimension d'un l'espace vectoriel réduit au vecteur nul)
On admettra que : $\dim\{0\} = 0$.

Exemple 6.

- $\mathbb{R}^3$ admet comme base $(e_1,\ e_2\ e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$.
  Les bases de $\mathbb{R}^3$ ont donc 3 éléments. Donc $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
- $\mathbb{R}_3[X]$ admet comme famille génératrice $(1, X, X^2, X^3)$ qui a quatre éléments donc :
  $$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4.$$
  Attention au piège ! ! $\dim(\mathbb{R}_3[X]) \neq 3$ **! ! ! ! ! ! !**
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet comme famille génératrice $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ avec
  $$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  Donc $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Il faut connaître PAR COEUR la proposition suivante, qui est FONDAMENTALE !
(et dont la preuve est immédiate car nous connaissons les bases canoniques de ces espaces.)

Proposition 11. (dimensions des evdf de référence)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$
- $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

2.1.3 Familles libres, génératrices en dimension n

Maintenant que la notion de dimension a un sens, voici deux propositions et un théorème très utiles en pratique. Il faut donc les connaître PAR COEUR.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 9 (mais vous devez comprendre pourquoi) :

Proposition 12. (Tailles maximales (resp. minimale) des familles libres (resp. génératrices))
Dans un espace vectoriel de dimension n,

- toute famille libre a au plus n éléments
- toute famille génératrice a au moins n éléments

Proposition 13. (Caractérisation des bases dans un ev de dimension n) (*Voir la preuve*)
Soit E un espace vectoriel de dimension n

- Toute famille libre de n éléments est une base de E
- Toute famille génératrice de n éléments est une base de E.

Voici un exercice classique à savoir refaire absolument par tous !

Exercice de cours 6. (*Voir la correction*)

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \Big((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer le vecteur u_0 qui a pour coordonnées $(-5,-3,-1)$ dans cette base.
3. On note u_1 le vecteur de coordonnées $(-5,-3,-1)$ dans la base canonique. Déterminer les coordonnées de u_1 dans la base $\mathcal{B}$.

Un autre, tout aussi classique, à savoir refaire !

Exercice de cours 7. (*Voir la correction*)

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X+1, X^2-1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le polynôme P de coordonnées $(-2,3,1)$ dans cette base.
3. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du polynôme $Q = 2X^2 - 3X + 1$.

Théorème 14. (Théorème de la base incomplète) (Voir la preuve)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de p vecteurs de E avec $p < n$.
On peut compléter la famille $(x_1, \dots, x_p)$ par $n-p$ vecteurs de E pour former une base de E.
Autrement dit : *toute famille libre de taille strictement inférieure à la dimension peut être complétée pour former une base*

2.1.4 Un dernier résultat à connaître : Base de Taylor $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n un entier naturel non nul et a un réel.
Nous avons déjà vu que la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ appelée *Base de Taylor*. Mais il faut savoir le prouver et savoir donner les coordonnées de tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base. C'est l'objet de cet exercice de cours que tout le monde doit savoir traiter.

Exercice de cours 8. (*Voir la correction*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $u_k = (X-a)^k$.
Attention : u_k est donc un polynôme de degré k !

1. Démontrer que $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donner les coordonnées de P dans la base $(u_0, u_1, \dots, u_n)$.
3. Application : Déterminer les coordonnées de $X^3 + X + 1$ dans la base de $\mathbb{R}_3[X]$ suivante :
$$\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3).$$

2.2 Sous-espaces vectoriels

On va voir que tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension n est de dimension inférieure ou égale à n. Celà justifie par exemple que les sev de $\mathbb{R}^3$ sont soit l'espace vectoriel nul, soit des droites vectorielles, soit des plans vectoriels, soit $\mathbb{R}^3$ tout entier.
Même si ce théorème peut vous sembler évident, sa démonstration ne l'est pas.
Ce théorème, ainsi que la proposition qui suit, sont à connaître PAR COEUR.

Théorème 15. (Sous-espace vectoriel d'un ev de dim finie) (Voir la preuve)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Proposition 16. (Condition suffisante d'égalité de deux sev) (Voir la preuve)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} F \subset G \\ \text{et} \\ \dim F = \dim G \end{cases}, \quad \text{alors} \quad F = G$$

Remarque. La proposition ci-dessus est très importante car c'est presque toujours celle qu'on utilise pour démontrer que deux espaces vectoriels sont égaux :

- On prouve que l'un des deux espaces vectoriel est inclus dans le second.
- On prouve ensuite que les deux espaces vectoriels ont même dimension.

Exercice de cours 9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n. Soit H un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ (remarque : on dit que H est un hyperplan de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset F$ et $H \neq F$. Montrer que $F = E$.

2.3 Rang d'une famille de vecteurs

2.3.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ **n'est pas systématiquement une base de** $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ (il faut pour cela qu'elle soit libre). Par contre elle est, par définition, une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ qui est donc de dimension inférieure ou égale à n.

La dimension de $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle le *rang* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$:

Définition 8. (Rang d'une famille finie de vecteurs)
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle *rang* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ la dimension de $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. On le note $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.
Autrement dit : $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim(\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n))$

Attention : le rang d'une famille de vecteur n'a rien à voir avec le sens du mot rang dans le langage courant !

Il faut connaître la proposition ci-dessous.
La preuve de chaque point est immédiate et il faut bien la comprendre.

Proposition 17. (Propriétés fondamentales du rang) (*Voir la preuve*)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E.

1. $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) \leq p$ et $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) \leq n$.
2. $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre
3. $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une famille génératrice
4. Dans le cas d'une famille de n vecteurs (c'est-à-dire $p = n$) :
   $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E

2.3.2 Déterminer le rang d'une famille de vecteur en pratique

Pour calculer le rang d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$, on regarde d'abord si cette famille est libre, si ce n'est pas le cas alors on peut faire "*des opérations sur le rang*" comme on a fait des opérations sur les "Vect". Les mêmes opérations sont possibles :

Proposition 18. (Opérations sur le rang)
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs. On ne change pas $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ si on :

1. enlève le vecteur nul (si la famille $\mathcal{F}$ en contient un !), ou un vecteur redondant, ou un vecteur qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs,
2. permute des vecteurs,
3. multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
4. remplace un vecteur par une combinaison linéaire de ce vecteur (avec un coefficient non nul pour ce vecteur) et d'autres vecteurs de la famille.

Exercice de cours 10. (*Voir la correction*)
On considère la famille $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$ avec $x_1 = (1, 0, -1)$, $x_2 = (-1, 2, 1)$, $x_3 = (1, 2, -1)$.
Déterminer le rang de $\mathcal{F}$.

3 Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie

3.1 Dimension d'une somme en dimension finie

Proposition 19. (Dimension de $F + G$ (en dimension finie)) (*Voir la preuve*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Cette formule doit être connue par cœur par tous ! ! Vous remarquez qu'elle fait penser à la formule du crible vu en probabilité. **Il ne faut pas confondre ces deux formules** qui ne disent pas du tout la même chose (et donc **ne pas écrire** $\dim(F \cup G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ car $\dim(F \cup G)$ n'a, en général, aucun sens, puisque $F \cup G$ n'est, en général, pas un espace vectoriel !)

3.2 Somme directe et dimension (en dimension finie)

Proposition 20. (Dimension d'une somme directe de 2 espace vectoriels) (*Voir la preuve*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si F et G sont en somme directe alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Cette proposition se généralise à p sous-espaces :

Proposition 21. (Dimension d'une somme directe de p espace vectoriels) (admis) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
Si ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on a :

$$\dim (F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p.$$

3.3 Espaces supplémentaires en dimension finie

3.3.1 Cas de deux sous-espaces

Toutes les propositions de cette section sont importantes !

Proposition 22. (Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie) (*Voir la preuve*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet un supplémentaire.
Autrement dit : *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet toujours un supplémentaire*

Proposition 23. (Caractérisation $E = F \oplus G$ par la dimension de la somme et par $F \cap G$) (admis) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases} .$$

Exercice de cours 11. (*Voir la correction*)
On reprend l'énoncé de l'exercice 3. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice de cours 12. (*Voir la correction*)
On reprend l'énoncé de l'exercice 2.
On rappelle qu'on a posé $E_1 = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1), (0,1,1) \Big)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0), (0,1,0) \Big)$.
On a vu dans l'exercice 2 que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires.

Exercice de cours 13. (*Voir la correction*)
On pose $F = \mathrm{Vect}\,(2X+1)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^2, 1\right)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 24. (Caractérisation $E = F \oplus G$ par concaténation des bases) (admis)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$E = F \oplus G \iff$ il existe une base de E qui est la concaténation d'une base de F et d'une base de G

Une telle base de E est alors appelée **base de E adaptée à F et G**.

Exercice de cours 14. (*Voir la correction*)
Reprendre l'exercice précédent en utilisant la concaténation des bases.

3.3.2 Généralisation à p sous-espace vectoriel

Proposition 25. (Caractérisation de $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$ par la dimension) (admis)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, F_2, \ldots F_p$ des sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p \iff \begin{cases} E = F_1 + F_2 + \ldots + F_p \\ \text{et} \\ \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \ldots + \dim F_p \end{cases}$$

Proposition 26. (Caractérisation de $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$ par concaténation des bases) (admis)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, F_2, \ldots F_p$ des sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel de dimension finie. Alors $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$ si et seulement si il existe une base de E qui est la concaténation d'une base de F_1, d'une base de F_2, ..., d'une base de F_p.
(cette base est dite adaptée à la somme directe).

4 Preuves et solutions

4.1 Preuves

Preuve de la proposition 1

- $F+G \subset E$ puisque tout élément de $F+G$ est une somme de deux vecteurs de E
- $0_E \in F+G$ car $0_E = 0_E + 0_E$ et que $0_E \in F$ et $0_E \in G$.
  Donc $F+G \neq \emptyset$.
- **Stabilité par combinaison linéaire**
  Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F+G$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in F+G$.
  $u = u_1+u_2$ et $v = v_1+v_2$ avec $u_1,\ \cancel{u_1}\ v_1 \in F$ et $u_2,\ v_2 \in G$. Ainsi, $\lambda u+\mu v = \underbrace{(\lambda u_1+\mu v_1)}_{\in F}+\underbrace{(\lambda u_2+\mu v_2)}_{\in G} \in F+G$

Donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
(*retour à la proposition 1*)

Preuve de la proposition 2

Tout élément de u de $F+G$ s'écrit $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ c'est donc une combinaison linéaire d'un élément de F et d'un élément de G.
Réciproquement, toute combinaison linéaire d'un élément de F et de G s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Donc $\lambda u \in F$ et $\mu v \in G$ donc $\lambda u + \mu v \in F+G$.
(*retour à la proposition 2*)

Preuve de la proposition 3

On suppose que $F \subset H$ et $G \subset H$. On veut montrer que $F+G \subset H$.
Soit $x \in F+G$. Alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. Donc $x_1 \in H$ et $x_2 \in H$ or H est un sous-espace vectoriel, d'où $x_1 + x_2 \in H$.
On a donc bien $x \in H$.
(*retour à la proposition 3*)

Preuve de la proposition 4

On va prouver que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \subset F+G$ et $F+G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$

- Montrons $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \subset F+G$:
  Il suffit de montrer que les vecteurs de la famille $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ appartiennent à $F+G$.
  Or les vecteurs de $\mathcal{F}_1$ appartiennent à F donc à $F+G$ et les vecteurs de $\mathcal{F}_2$ appartiennent à G donc à $F+G$.
  D'où : $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \subset F+G$.
- Montrons $F+G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$:
  Soit $x \in F+G$. Donc $x = y+z$ avec $y \in F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $z \in G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)$.
  Donc x est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}_1$ et F_2. Autrement dit : $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
  On a donc bien $F+G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Finalement $F+G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
(*retour à la proposition 4*)

Preuve du théorème 8

Rappelons d'abortd un résultat vu dans le chapitre 15 qui sera utile :
Si dans une famille génératrice $(x_1, \ldots, x_n)$, x_n est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une famille génératrice.

Prouvons maintenant le théorème de la base extraite :
Traitons déjà le cas très particulier (et abstrait) où E est un espace vectoriel réduit à son vecteur nul. Dans ce cas, sa seule base est la famille vide qui est bien une sous famille de $(x_1, \ldots, x_n)$.
On traite maintenant les cas où E n'est pas réduit à son vecteur nul.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base. Sinon, un vecteur de $(x_1, \ldots, x_n)$, disons x_n (quitte à les renuméroter), est une combinaison linéaire des autres. Alors $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une famille génératrice.
On recommence : soit $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est libre et c'est une base, soit un de ses vecteurs, disons x_{n-1} (quitte à les renuméroter), est combinaison linéaire des autres. Alors $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ est génératrice.
On continue ainsi de suite. Soit on arrive à une famille libre et donc à une base, soit on arrive à la fin au fait que la famille (x_1) est génératrice, donc que $x_1 \neq 0_E$ (puisque E n'est par réduit à son vecteur nul) et donc que (x_1) est une famille libre, donc une base. Dans tous les cas, on a extrait une base de la famille génératrice.
(*retour au théorème 8*)

Preuve du théorème 9

Commençons par prouver un lemme nommé ***lemme d'échange*** :

> *Soit $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{L}'$ une sous-famille stricte de $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}' \neq \mathscr{L}$). On suppose qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathscr{G} = \mathscr{L}' \cup \mathcal{F}$ est génératrice.*
> *Alors on peut obtenir une famille génératrice en échangeant un élément de $\mathcal{F}$ par un élément de $\mathscr{L} \setminus \mathscr{L}'$.*

Preuve du lemme d'échange :
Soit $y \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}'$. $\mathscr{G}$ étant génératrice, y s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{G} = \mathscr{L}' \cup \mathcal{F}$:

$$y = \sum_{x \in \mathscr{G}} \lambda_x x.$$

Dans cette combinaison, les coefficients des éléments de $\mathcal{F}$ ne sont pas tous nuls car sinon y serait combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{L}'$ ce qui contredit le fait que $\mathscr{L}$ soit libre.

Donc il existe un élément $x_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\lambda_{x_0} \neq 0$. On a alors $x_0 = \dfrac{1}{\lambda_{x_0}} \left(y - \displaystyle\sum_{x \in \mathscr{G} \setminus \{x_0\}} \lambda_x x \right)$.
Donc $x_0 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G}')$ où $\mathscr{G}'$ est la famille obtenue en échangeant x_0 par y dans $\mathscr{G}$.
Donc tout élément de $\mathscr{G}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{G}'$. Or $\mathscr{G}$ est génératrice, donc $\mathscr{G}'$ est génératrice.
On remarquera que dans ce lemme, la famille $\mathscr{L}'$ peut tout à fait être vide (oui, la famille vide est bien libre. Pourquoi ?)

Prouvons maintenant le théorème :
Supposons par l'absurde qu'il existe une famille génératrice $\mathscr{G}$ ayant n vecteurs et une famille libre $\mathscr{L}$ ayant m vecteurs avec $m > n$.
D'après le lemme d'échange, on peut obtenir une famille génératrice en échangeant un vecteur $\mathscr{G}$ par un vecteur de $\mathscr{L}$. On obtient alors une famille génératrice $\mathscr{G}_1$ constituée d'1 vecteur de $\mathscr{L}$ et de $n-1$ vecteurs de $\mathscr{G}$.
On recommence, en échangeant un de ces $n-1$ vecteurs de $\mathscr{G}$ par un des vecteur $m-1$ vecteurs restant de de $\mathscr{L}$.
On obtient ainsi une famille génératrice $\mathscr{G}_2$ constituée de 2 vecteurs de $\mathscr{L}$ et de $n-2$ vecteurs de $\mathscr{G}$.
On continue ainsi de suite jusqu'à obtenir une famille génératrice $\mathscr{G}_n$ constituées de n vecteurs de $\mathscr{L}$ c'est-à-dire uniquement de vecteurs de $\mathscr{L}$.
Puisque $m > n$, $\mathscr{L} \setminus \mathscr{G}_n$ n'est pas vide. Il existe donc un vecteur de $\mathscr{L}$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$: absurde puisque $\mathscr{L}$ est libre !
(*retour au théorème 9*)

Preuve du théorème 10

Supposons par l'absurde qu'il existe une base $\mathcal{B}$ avec n éléments et une base B' avec m éléments avec $n < m$.
$\mathcal{B}'$ est plus grande que $\mathcal{B}$ qui est génératrice. Donc, d'après le théorème 9, $\mathcal{B}'$ est liée : absurde puisque c'est une base.
(*retour au théorème 10*)

Preuve de la proposition 13

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre à n éléments. Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas génératrice.
D'après le théorème de la base extraite (théorème 8), on peut extraire une base de $\mathscr{L}$, ce qui est absurde car on aurait alors une base de taille strictement inférieure à n.

Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice à n éléments. Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas libre.
Alors un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres et donc on obtient encore une famille génératrice en ôtant ce vecteur de $\mathscr{G}$. On obtient alors une famille génératrice à $n-1$ éléments. Absurde d'après la proposition 12 qui dit qu'une famille génératrice de E a au moins n éléments !
(*retour à la proposition 13*)

Preuve de la proposition 14

$(x_1, \dots, x_p)$ n'est pas génératrice, donc il existe $y \in E$ tel que $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
Montrons que $(x_1, \dots, x_p, y)$ est encore libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in R^{p+1}$ tel que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} y = 0$.
$\lambda_{p+1} = 0$ car sinon on pourrait exprimer y comme combinaison linéaire des x_i.
Donc $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$, or $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

On réitère ce processus jusqu'à avoir n n vecteurs.
(*retour à la proposition 14*)

Preuve du théorème 15

Si F est réduit au vecteur nul, alors il est de dimension 0 donc finie, et on a bien $\dim F \leq \dim E$.
Sinon, soit $x_1 \in F$ non nul. On procède comme dans la démonstration du théorème de la base incomplète :
La famille (réduite à un seul vecteur) (x_1) est libre (car $x_1 \neq 0_E$) donc $\dim E \geq 1$.
Soit cette famille est génératrice de F et donc c'est une base et donc F est de dimension finie et $\dim F = 1 \leq \dim E$.
Soit cette famille n'est pas génératrice de F et donc il existe $x_2 \in F$ telle que (x_1, x_2) est libre. Cela implique au passage que $\dim E \geq 2$.
De nouveau, soit la famille (x_1, x_2) est génératrice de F et alors F est de dim finie avec $\dim F = 2 \leq \dim E$.
Soit la famille (x_1, x_2) n'est pas génératrice de F et donc il existe $x_3 \in F$ tel que (x_1, x_2, x_3) est libre (ce qui implique au passage que $\dim E \geq 4$.
On continue ce processus, qui s'arrête soit si on obtient une famille génératrice de F, soit si on arrive à n vecteurs avec $n = \dim E$. Dans ce dernier cas, la famille est libre à n vecteurs donc c'est une base, donc elle est génératrice de E donc de F qui est donc égal à E.
(*retour au théorème 15*)

Preuve de la proposition 16

Notons n la dimension de G. On a donc aussi $\dim F = n$. Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de F avec n éléments.
$\mathcal{B}$ est une famille libre de F, donc de G, et elle possède n éléments, c'est donc aussi une base de G. Ainsi tout vecteur de G s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$ donc de vecteurs de F donc $G \subset F$. Or $F \subset G$

donc $F = G$
(*retour à la proposition 16*)

Preuve de la proposition 17

1. $(x_1, \dots, x_p)$ est par définition une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ donc $\dim\Big(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)\Big) \leq p$.
   $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est inclus dans E donc $\dim\Big(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)\Big) \leq n$.
2. Si $\dim\Big(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)\Big) = p$ alors $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de p vecteurs d'un espace de dimension p donc c'est une base donc elle est libre.
   Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, c'est une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ qui est donc de dimension p.
3. Si $\dim\Big(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)\Big) = n$ alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$ (d'après la proposition 16) et donc $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de E.
   Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de E alors tout vecteur de E est combinaison linéaire de cette famille. Donc $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et donc $n = \dim E = \dim\left(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)\right)$.
4. D'après le point 2 avec $p = n$: $\text{rg}\,(x_1, \dots, x_n) = n \iff (x_1, \dots, x_n)$ est libre .
   D'après le point 3 avec $p = n$: $\text{rg}\,(x_1, \dots, x_n) = n \iff (x_1, \dots, x_n)$ est génratrice .
   Donc $\text{rg}\,(x_1, \dots, x_n) = n \iff (x_1, \dots, x_n)$ est une base .

(*retour à la proposition 17*)

Preuve de la proposition 19

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de $F \cap G$.
On la complète par $y_{p+1}, \dots, y_r \in F$ de sorte que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r)$ est une base de F et par $z_{p+1}, \dots, z_s \in G$ de sorte que $(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_s)$ est une base de G.

On remarque que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r, z_{p+1}, \dots, z_s)$ est une famille génératrice de $F + G$.
En effet, si $u \in F + G$, alors $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$ et donc u_F est une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r)$ et u_G une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_s)$ et au final, u est bien une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r, z_{p+1}, \dots, z_s)$.

Montrons que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r, z_{p+1}, \dots, z_s)$ est libre.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $\mu_{p+1}, \dots, \mu_r$, $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_s$ tels que

$$\sum \lambda_i x_i + \sum \mu_i y_i + \sum \gamma_i z_i = 0$$

On a alors $\sum \gamma_i z_i = -\sum \lambda_i x_i - \sum \mu_i y_i \in F$ donc $\sum \gamma_i z_i \in F \cap G$, donc nécessairement $\sum \gamma_i z_i = 0$ (car sinon on aurai $\sum \gamma_i z_i$ qui s'écrirait comme une combinaison linéaire des $(x_1, \dots, x_p)$ ce qui contredit la liberté de la famille $(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_s)$).
Et comme la famille (z_i) est libre, les γ_i valent 0.

De même $\sum \mu_i y_i \in G$ donc nécessairement $\sum \mu_i y_i = 0$ et les μ_i valent 0 et ainsi les λ_i aussi (par liberté de la famille (x_i).
Donc la famille $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_r, z_{p+1}, \dots, z_s)$ est libre. Donc c'est une base de $F + G$ et son cardinal est $\dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
(*retour à la proposition 19*)

Preuve de la proposition 5

On suppose que la somme $F+G$ est directe. Alors, on sait déjà que $\{0\} \subset F \cap G$. Soit $x \in F \cap G$, alors $x = x + 0 = 0 + x$, on a deux écritures de x sous la forme $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ si $x \neq 0$. Donc nécessairement $x = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.
On suppose que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F + G$, soit $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$ tels que $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Alors on a $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, donc $x_1 - x_2 \in F \cap G$ donc $x_1 = x_2$, de même $y_1 = y_2$ donc la somme $F + G$ est directe.
(*retour à la proposition 5*)

Preuve de la proposition 20

C'est une conséquence immédiate de la caractérisation d'une somme directe et de la formule de la dimension d'une somme.
(*retour à la proposition 20*)

Preuve de la proposition 6

C'est une conséquence immédiate de la définition et de la caractérisation d'une somme directe.
(*retour à la proposition 6*)

Preuve de la proposition 22

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une base de F. On complète cette base par $(y_{p+1}, \ldots, y_n)$ pour former une base de E. Alors $G = \mathrm{Vect}(y_{p+1}, \ldots, y_n)$ est un supplémentaire de F.
(*retour à la proposition 22*)

4.2 Solutions

Solutions pas disponibles dans cette version du pdf !