**Exercice 1 . (ADC)**

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}.$$

1. Déterminer une base de $F$ et une base de $G$.
2. Donner une famille génératrice de $F + G$ puis une base de $F + G$.

1. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in F \iff 2x - y - z = 0$

$\iff y = 2x - z$

$\iff u = (x, 2x-z, z)$

$\iff u = x(1,2,0) + z(0,-1,1)$

$\iff u \in \text{Vect}\big(\underbrace{(1,2,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,-1,1)}_{v_2}\big)$

Donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$

Or la famille $(v_1, v_2)$ est libre (car ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires)

Donc $(v_1, v_2)$ est une base de $F$.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in G \iff x + 3z = 0$

$\iff x = -3z$

$\iff u = (-3z, y, z)$

$\iff u = y\underbrace{(0,1,0)}_{v_3} + z\underbrace{(-3,0,1)}_{v_4}$

$\iff u \in \text{Vect}(v_3, v_4)$

Donc $G = \text{Vect}(v_3, v_4)$.

Et $(v_3, v_4)$ est libre (non colinéaires) donc c'est une base de $G$.

2. $(v_1, v_2)$ est une fam. géné. de $F$

$(v_3, v_4)$ " " " " " $G$

Donc $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une f.g. de $F+G$.

$\left((1,2,0), (0,-1,1), (0,1,0), \underline{(-3,0,1)}\right)$ est une f.g. de $F+G$.

On remarque que $-3v_1 + v_2 + 7v_3 = v_4$

Donc

$$F+G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$$

Donc $(v_1, v_2, v_3)$ est une f.g. de $F+G$.

Montrons qu'elle est libre :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

$$\iff (a, 2a, 0) + (0, -b, b) + (0, c, 0) = (0,0,0)$$

$$\iff (a, 2a-b+c, b) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

Donc $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } F+G.}$

**Exercice 2 . (ADC)**

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}$ (comme à l'ADC 1).

1. Déterminer $F \cap G$.
2. La somme $F + G$ est-elle directe ?

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in F \cap G \iff u \in F$ et $u \in G$

$\iff 2x - y - z = 0$ et $x + 3z = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(-3z) - y - z = 0 \\ x = -3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -7z \\ x = -3z \end{cases}$$

$\iff u = (-3z, -7z, z)$

$\iff u = z(-3, -7, 1)$

$\iff u \in \mathrm{Vect}((-3, -7, 1))$

$F \cap G = \mathrm{Vect}((-3, -7, 1))$

$F + G$ n'est pas directe car $F \cap G \neq \{0\}$.

**Exercice 3 . (ADC)**

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $H = \mathrm{Vect}((2,1,-1))$.

Montrer que $H$ et $F$ sont en somme directe.

$(0,0,0)$.

Montrons que $H \cap F = \{0\}$

Soit $u \in H \cap F$. Montrons que $u = (0,0,0)$

$u \in H$ donc $u = \lambda(2,1,-1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$u \in F$ donc $u = \mu(1,1,1)$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

Donc $\lambda(2,1,-1) = \mu(1,1,1)$.

$$\iff \begin{cases} 2\lambda = \mu \\ \lambda = \mu \\ -\lambda = \mu \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\mu = \mu \\ \lambda = \mu \\ -\mu = \mu \end{cases}$$

$\iff \lambda = \mu = 0$ donc $u = (0,0,0)$

Donc $\boxed{\text{la somme } F+G \text{ est directe}}$