Exercice 4 . (ADC)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimensio

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y + 4z = 0\}$;) imp.
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = 0\}$;) imp.
3. $F = \{(3x - 5y, 2x, x + y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$) im. dir.
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$;) imp.
5. $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$;) imp.
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$;) im dir.
7. l'ensemble F des suites réelles arithmétiques.) ?

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in F \iff x + 5y + 4z = 0$$
$$\iff x = -5y - 4z = 0$$
$$\iff u = (-5y - 4z, y, z)$$
$$\iff u = y\underbrace{(-5, 1, 0)}_{v_1} + z\underbrace{(-4, 0, 1)}_{v_2}$$
$$\iff u \in \text{Vect}(v_1, v_2)$$

Donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

(v_1, v_2) est fam. gen. de F

Or elle est libre car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

Donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = 2.}$

3. $F = \{(3x-5y, 2x, x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$

$u \in F \iff u = (3x-5y, 2x, x+y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

$\iff u = x\underbrace{(3,2,1)}_{v_1} + y\underbrace{(-5,0,1)}_{v_2}$

$\iff u \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

etc...

4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$;

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$P(1) = a\times 1^3 + b\times 1^2 + \ldots$

$P \in F \iff P(1) = 0$

$=$

$\iff a + b + c + d = 0$

$aX^3 - a = a(X^3 - 1)$

$\iff d = -a-b-c$

$\iff P = aX^3 + bX^2 + cX - a - b - c$

$\iff P = a(X^3-1) + b(X^2-1) + c(X-1)$

$\iff P \in \mathrm{Vect}(X^3-1, X^2-1, X-1)$

Donc $F = \mathrm{Vect}(X^3-1, X^2-1, X-1)$

Donc $(X^3-1, X^2-1, X-1)$ est une fam. gen. de F

Or elle est libre (car échelonnée en degré)

Donc c'est une base de F

$$\boxed{\dim F = 3}$$

5. $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$; $\left(F = \mathcal{A}_3(\mathbb{R})\right)$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$A \in F \iff {}^tA = -A$

$\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a = -a \\ d = -b \\ g = -c \\ b = -d \\ e = -e \\ h = -f \\ c = -g \\ f = -h \\ i = -i \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ 2e = 0 \\ h = -f \\ 2i = 0 \end{cases}$

$\iff A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

$\iff A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

... $\boxed{\dim F = 3}$

6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$; ← im. direct.

7. l'ensemble F des suites réelles arithmétiques.

6. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$M \in F \iff M = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\iff M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$

$\iff M \in \mathrm{Vect}(A, B, C)$.

Donc $F = \mathrm{Vect}(A, B, C)$

Donc (A, B, C) est une fam. gen. de F.

Montrons que cette famille est libre.

$aA + bB + cC = 0$

$\iff \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-b = 0 \\ c+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+b-b = 0 \\ a = b \\ c = -b \end{cases} \iff a = b = c = 0$

Donc $\boxed{(A, B, C) \text{ est libre, donc c'est une base de } F \text{ et } \dim F = 3}$

6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$;

7. l'ensemble F des suites réelles arithmétiques.

7. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$u \in F \iff u$ est arithmétique

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = an + b.$ $\left(u_n = n \times \overset{\overset{b}{\downarrow}}{r} + \overset{\overset{a}{\downarrow}}{u_0} \right)$

Notons (v_n) la suite définie par $v_n = n$

(w_n) la suite " " $w_n = 1$.

alors $(u_n) \in F \iff u_n = a v_n + b \times w_n$

$\iff (u_n) \in \text{Vect}\left((v_n), (w_n) \right)$

Donc $F = \text{Vect}\left((v_n), (w_n) \right)$.

Donc $\left((v_n)(w_n) \right)$ est une fam. gen. de F

Or elle est libre car (v_n) et (w_n) ne sont pas colinéaires.

Donc

$\boxed{\left((n), (1) \right) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim F = 2}$

Exercice 5 . (ADC)

1. Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $(X^2+X+1, 2X^2+3X+4, -X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Il suffit de montrer qu'elle est libre.

$$a(1,0,1)+b(0,1,0)+c(1,2,3)=(0,0,0).$$

$\Longleftrightarrow$ . . .

. . .

$\Longleftrightarrow a=b=c=0.$

C'est une famille libre à 3 vecteurs.

or $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons $\mathcal{F}$ cette famille et montrons qu'elle est libre.

$$a(X^2+X+1)+b(2X^2+3X+4)+c(-X^2+X+1)=0$$

$$\Longleftrightarrow (a+2b-c)X^2+(a+3b+c)X+a+4b+c=0$$

le polynôme nul.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a+3b+c=0 \\ a+4b+c=0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ . . .

$\Longleftrightarrow a=b=c=0$

Donc $\mathcal{F}$ est libre or $\operatorname{Card}\mathcal{F}=3=\dim \mathbb{R}_2[X]$

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$