Programme de colle 21

Chapitre 18 : Espaces vectoriels de dimension finie – somme de sous-espaces vectoriels.

Liste des notions vues en classe. Tout est à connaître !
Les définitions et propositions marquées ♥♥ sont à connaître par ultra par cœur (sans aucune hésitation, sur le bout des doigts). Les autres sont à connaître par cœur.

♥♥ Définition 1 : Somme de deux sous-espaces vectoriels
Exemple 1 : quelques vecteurs de F+G avec deux espaces F et G particuliers.
♥♥ Proposition 1 : une somme de sevs est un sev.
♥♥ proposition 2 : F+G est l'ensemble des CL d'éléments de F et G
♥ proposition 3 : F+G est le plus petit sev contenant F et G : si F et G sont inclus dans H alors F+G aussi.
Déf 2 : somme de n sevs
♥♥ Prop 4 : On obtient une famille génératrice de F+G en concaténant une f.g. de F et une f.g. de G.
♥♥ Déf 3 : somme directe de deux sevs.
Déf 4 : somme directe de n sevs.
♥♥ Prop 5 : F+G est directe si et seulement si F inter G ={0}
♥♥ prop 5' : F inter G est un sev (pas F union G)
♥♥ Déf 5 : sevs supplémentaires
♥♥ Prop 6 : caractérisation de sevs supplémentaires
♥ Def 6 : espaces vectoriels de dimension finie
Exemples d'espaces de dimension finie
♥ Thme 8 : théorème de la base extraite : de toute famille libre, on peut extraire une base
♥ Thme 9 : toute famille plus grande qu'une famille génératrice et liée
♥ Thme 10 : toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal
♥ Def 7 : la dimension d'un evdf est le cardinal d'une base.
♥♥ prop 11 : dimension des espaces vect de référence.
♥♥ prop 12 : dans un esp. vect. de dim n, les familles libres ont au plus n vecteurs, les familles génératrices ont au moins n vecteurs.
♥♥ prop 13 : Dans un esp. vect. de dim n, un famille libre de n vecteurs est une base, une famille génératrice de n vecteurs est une base.
♥ Thme 14 - théorème de la base incomplète.
♥♥ Thme 15 - Tout sev d'un evdf est un evdf de dimension inférieure ou égale.
♥♥ prop 16 - Si un sous-espace F est inclus dans G et que dim F = dim G alors F=G.
♥♥ prop 19 - Formule de la dimension d'une somme.
preuve
♥♥ prop 20 - Formule de la dimension d'une somme directe.
♥♥ prop 21 - Dimension d'une somme directe de p sous-espaces vectoriels.
♥ prop 22 - tout sev d'un evdf admet un supplémentaire.
♥♥ prop 23 - F et G sont supplémentaires dans E si dim(F+G)=dim E et F inter G ={0}
♥♥ Prop 24 - théorème de la base adaptée : F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si une base de E est la concaténation d'une base de F et d'une base de G.
♥♥ Prop 25 - Caractérisation d'une somme directe de p sous-espaces vectoriels
♥♥ Prop 26 - théorème de la base adaptée pour p espaces vectoriels

Liste des exercices traités

Exercices de cours

Exercice de cours 1 : démontrer qu'un vecteur appartient à F+G en trouvant une décomposition.
Exercice de cours 2 : famille génératrice d'une somme par concaténation des familles génératrices
Exercice de cours 3 : démontrer qu'une somme est directe en prouvant que F inter G ={0}
Exercices de cours 6 et 7 questions 1 : démontrer que des familles sont des bases (en vérififant qu'elles sont libres et qu'elles ont autant d'éléments que la dimension)
"Exemple. Compléter le couple (u1,u2), où u1 = (1, 1, 0) et u2 = (1, 2, 0) en une base de R^3"
Exercice de cours 8: la famille (1,X-a,(X-a)²,...,(X-a)^n) est une base de R_n[X] et donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base
Exercice de cours 9 : exercices aves les hyperplans.
Exercices de cours 11, 12 et 14 sur les sommes directes.

Feuille d'exercices

Exercice 1 FE18 : Déterminer une base de F et de G puis de F+G avec F et G définis de façon implicite.
On applique la méthode classique pour déterminer la base de F et de G. Pour celle de F+G, on concatène les bases et on enlève les vecteurs en trop jusqu'à avoir une famille libre.

Exercice 2 FE18 : F et G sont les mêmes qu'à l'exercice 1. Déterminer F inter G.
Exercice 3 FE18 : intersection de deux droites vectorielles.
Exercice 4 FE18 : Déterminer des bases d'espaces vectoriels définis de façon implicite ou par image directe.
Exercice 5 FE18 : montrer qu'une famille donnée est une base en montrant qu'elle est libre et qu'elle a autant de vecteurs que la dimension.

Exercice 6 :
- Déterminer la base d'un espace défini par un vect.
Attention ici la famille n'était pas libre donc il fallait "enlever des vecteurs au vect" jusqu'à obtenir une famille libre.
- Compléter une famille libre en une base de R^3 : ajouter un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de la famile.

Exercice 7 :
- Déterminer la dimension d'un espace défini de façon implicite et déterminant une base (cf exo 4).
- Montrer que deux espaces sont égaux en prouvant que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension.

Exercice 8 :
- (P,P',P'',...P(n)) base de R_n[X] quand deg(P)=n (famille libre car échelonnée en degrés).

Exercice 9
- Montrer que deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires quand la somme des dimensions est trop grande.
- Déterminer une base de F inter G en prouvant que F inter G = Vect(...)
  Déterminer la dimension de F inter G par un raisonnement

Exercice 11
- Montrer que deux droites vectorielles ne sont pas supplémentaires car la somme de leurs dimensions était trop petite.

Exercice 12
- Comme le 9:
- Montrer qu'une somme n'est pas directe car la somme des dimensions est trop grande.
- Déterminer la dimension de F inter E en l'encadrant puis "pas 0" et "pas 2" par l'absurde.
- prouver que E+F=tout l'espace à l'aide de la formule de dim(F+G).

Exercice 13 :
- Déterminer un supplémentaire de F en complétant une base de F.

Exercice 14 :
- Prouver que deux sous-espaces dont on a une base sont supplémentaires en vérifiant que le concaténation des bases donne bien une base de "tout l'espace".