Exercice 6 . (ADC)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$ et on note
$$F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}.$$

1. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de F. Quelle est la dimension de F?
2. Compléter la famille libre $\mathscr{B}$ pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $F = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$

(e_1, e_2, e_3) est une f.g. de F.

$$a e_1 + b e_2 + c e_3 = 0$$

$$\iff (0, -a, 2a) + (b, -2b, 3b) + (c, -c, c) = (0,0,0)$$

$$\iff (b+c, -a-2b-c, 2a+3b+c) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} b+c=0 \\ -a-2b-c=0 \\ 2a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=-c \\ -a+2c-c=0 \\ 2a-3c+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=-c \\ -a+c=0 \\ 2a-2c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=-c \\ a=c \\ a=c \end{cases}$$

par exemple $a=1$; $b=-1$; $c=1$ est solution.

Donc $e_1 - e_2 + e_3 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad e_2 = e_1 + e_3$

$F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
$F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ car $e_2 = e_1 + e_3$

Donc (e_1, e_3) est une f.g. de F
Or e_1 et e_3 ne sont pas colinéaires
Donc (e_1, e_3) est libre
D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{B} = (e_1, e_3) \text{ est une base de } F \\ \text{et } \dim F = 2 \end{array}}$$

2. $\mathcal{B} = (e_1, e_3) = \big((0,-1,2), (1,-1,1)\big)$ est une f.l. de $\mathbb{R}^3$

$e_3 - e_1 = (\underline{1}, \underline{0}, -1)$

On pose $u = (1, 0, 0)$

Montrons que $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, u)$ est libre.

$$a e_1 + b e_3 + c u = 0$$

$$\Longleftrightarrow (b+c, -a-b, 2a+b) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b+c = 0 \\ -a-b = 0 \\ 2a+b = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = -b \\ -2b+b = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc $\mathcal{B}'$ est libre et card $\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 . (ADC)

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - 4t + 2z = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de E
2. Montrer que $E = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(2, 1, -3, -1)}_{u_1}, \underbrace{(2, -5, 3, 2)}_{u_2}\big)$.

1. Voir exercice 4.

$\boxed{\dim E = 2}$

2. Posons $F = \mathrm{vect}\big(\underbrace{(2,1,-3,-1)}_{u_1}, \underbrace{(2,-5,3,2)}_{u_2}\big)$

Montrons que $F \subset E$

Il suffit de prouver que $u_1 \in E$ et $u_2 \in E$.
(immédiat).

On a donc $F \subset E$

Or (u_1, u_2) est une f.g. de F, qui est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc c'est une base de F

donc $\dim F = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \subset E \\ \bullet\ \dim F = \dim E \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{F = E}$$

Exercice 8 .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\deg P = n$

$\deg P' = n-1$

$\deg P'' = n-2$ $\Big\}$ $\deg P^{(k)} = n-k$

$\vdots$

$\deg P^{(n)} = 0$

incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$

La fam. est échelonnée en degré donc libre.

Or elle possède $n+1$ polynômes et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 .

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,1), (-1,1,-1))$.

1. Déterminer la dimension de F et de G.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une base de $F \cap G$.
4. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

1. $\dim F = 2$ et $\dim G = 2$.

2. Brouillon :

A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?

$F \subset \mathbb{R}^3$

$G \subset \mathbb{R}^3$

donc $F + G \subset \mathbb{R}^3$

Solution 1 : Supposons que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

On a alors :

$$\dim F + \dim G = 3$$

Absurde car $\dim F + \dim G = 4$.

Solution 2 :

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3 \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Ici $\dim F + \dim G \neq \dim \mathbb{R}^3$

Donc F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. <u>1ère méthode</u> : voir cours

Soit $u \in \mathbb{R}^3$ $\left(u=(x,y,z)\right)$

$u \in F \cap G \iff u \in F$ et $u \in G$

$\iff x-2y+z=0$ et $u=a(0,1,1)+b(-1,1,1)$

$\iff x-2y+z=0$ et $u=(-b,\ a+b,\ a+b)$

$\iff -b-2(a+b)+a+b=0$ et $u=(-b,a+b,a+b)$.

$\iff -a-2b=0$ et $u=(-b,a+b,a+b)$

$\iff a=-2b$ et $u=(-b,-b,-b)$

$\iff u=(-b,-b,-b)$

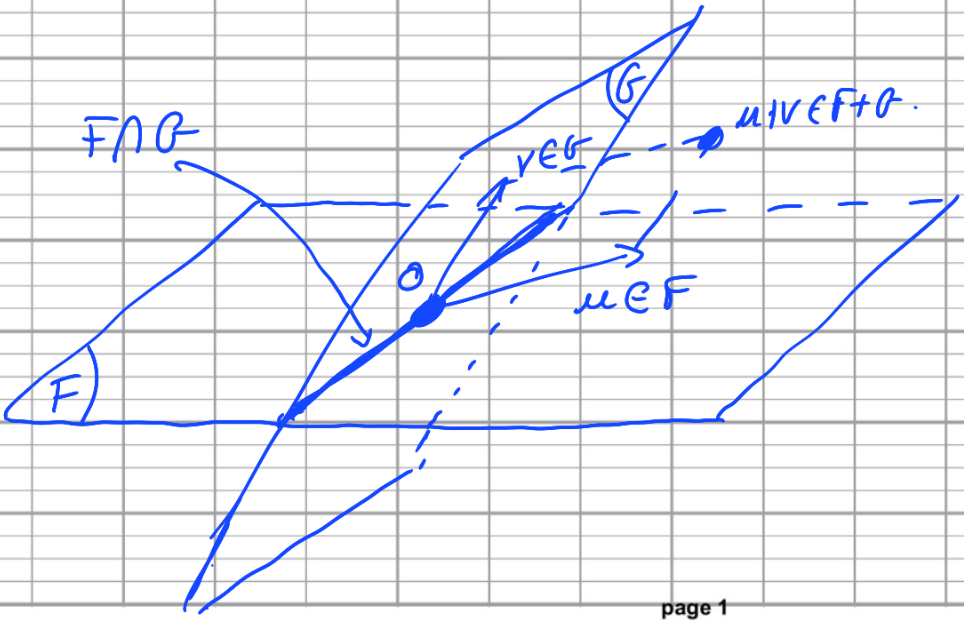
$\iff u=b(-1,-1,-1)$

$\iff u \in \text{Vect}\left((-1,-1,-1)\right)$.

Donc $F \cap G = \text{Vect}\left((-1,-1,-1)\right)$

Donc $\left((-1,-1,-1)\right)$ est une base de $F \cap G$.

<u>2ème méthode</u> : Cherchons $\dim(F \cap G)$.



On sait que $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$.

Donc $\dim(F \cap G) \leqslant \dim F = 2$

Donc $\dim(F \cap G) \in \{0, 1, 2\}$.

Mais $\dim(F \cap G) \neq 0$ car sinon la somme $F+G$ serait directe.

et on aurait $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 4 > \dim \mathbb{R}^3$

impossible.

Donc $\dim(F \cap G) \in \{1, 2\}$.

Or $\dim F \cap G \neq 2$

Car sinon on aurait $F \cap G \subset F$ et $\dim F \cap G = \dim F$ donc $F \cap G = F$

et de même $F \cap G = G$

Donc $G = F$

Absurde car, par exemple $(0,1,1) \in G$ et $(0,1,1) \notin F$.

Donc $\dim(F \cap G) = 1$.

Pour trouver une base de $F \cap G$, il suffit de trouver un vecteur non nul de $F \cap G$.

On remarque que $(1,1,1) \in F \cap G$. $\left(\begin{array}{l} 1-2+1=0 \\ \text{et } (1,1,1) = -(-1,1,-1) + 2(0,1,1) \end{array} \right)$

4. $\left(\begin{array}{ll} \text{Remarque} & F \subset F+G \text{ et } G \subset F+G \\ \text{D'ailleurs} & F \cap G \subset F \subset F+G \subset \mathbb{R}^3 \\ & F \cap G \subset G \subset F+G \subset \mathbb{R}^3 \end{array} \right)$

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

$= 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Or $F+G \subset \mathbb{R}^3$ donc $F+G = \mathbb{R}^3$

Exercice 10 .

On appelle « hyperplan » d'un espace vectoriel E de dimension n tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et H et H_2 deux hyperplans **distincts** de E. Démontrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$$

2. En déduire que l'intersection de deux plans vectoriels *distincts* de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle.

Exercice 11 .

On a vu que les espaces F et H de l'exercice 3 sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 .

Posons $E = Vect(X-1, X+2)$ et $F = Vect(X, X^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 .

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1,0,0),(1,2,3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

Exercice 14 .

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$ et $u_4 = (1,1,1,1)$. Soient

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_3, u_4)$$

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 15 .

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + 4z = 0\}$ et $F = Vect((1,0,0))$.

1. Déterminer une base de E et de F.

2. Montrer que E et F sont supplémentaires.

Exercice 16 . (***)

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$ (par analyse-synthèse).

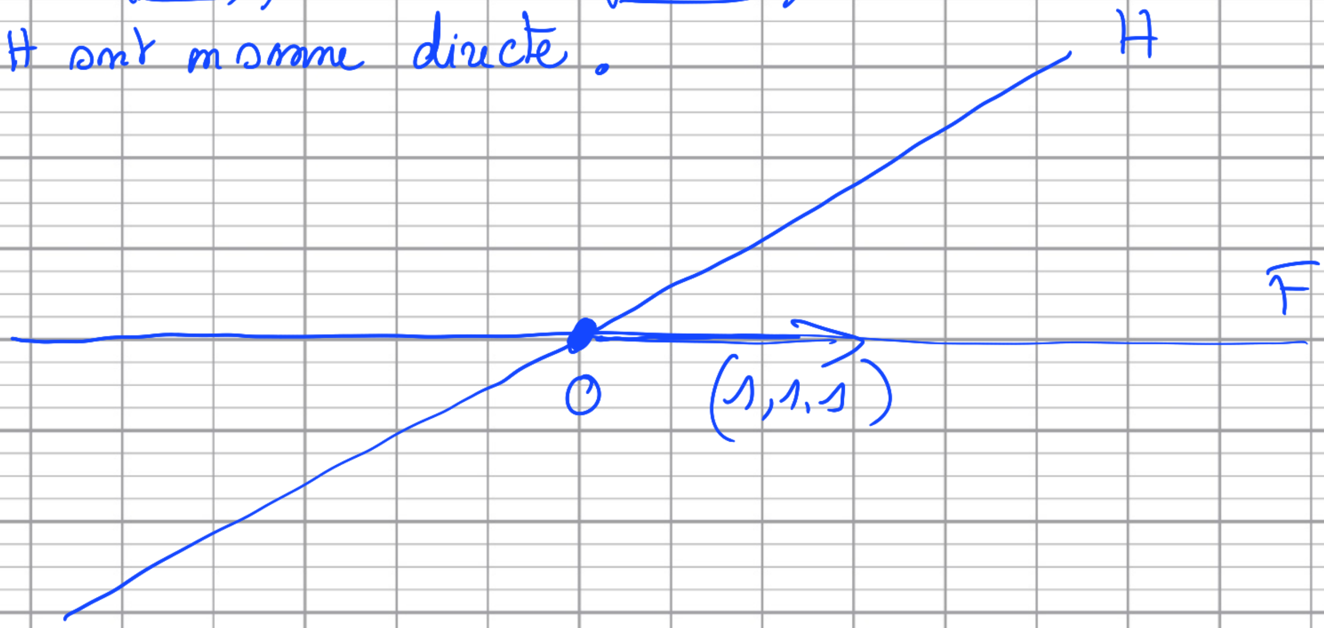
Exercice 11 .
On a vu que les espaces F et H de l'exercice 3 sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 .
Posons $E = Vect(X-1, X+2)$ et $F = Vect(X, X^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 .
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1,0,0),(1,2,3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

$F = Vect\left(\left(\underline{1,1,1}\right)\right)$ et $H = Vect\left(\left(\underline{2,1,-1}\right)\right)$

F et H sont en somme directe.



$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 1 + 1 = 2 < 3$$

donc $F \oplus G \neq \mathbb{R}^3$

Exercice 11 .
On a vu que les espaces F et H de l'exercice 3 sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 .
Posons $E = Vect(X-1, X+2)$ et $F = Vect(X, X^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 .
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1,0,0),(1,2,3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

12

a. Montrer que $E+F$ n'est pas directe

b. déterminer $\dim F \cap G$

c. Conclure que $E+F = \mathbb{R}_2[X]$.

a. On suppose par l'absurde que $E+F$ est directe.

$(X-1, X+2)$ est une f.g. de E et elle est libre car $X-1$ et $X+2$ ne sont pas colinéaires.

Donc c'est une base de E donc $\dim E = 2$.

De même $\dim F = 2$.

On a alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$
$= 2+2 = 4 < 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

Or $F \oplus G \subset \mathbb{R}_2[X]$

absurde

Donc $E+F$ n'est pas directe.

b. $E \cap F \subset F$ donc $\dim(E \cap F) \leq \dim F = 2$.

La somme $E+F$ n'est pas directe, donc $\dim(F \cap G) \neq 0$

Donc $\dim(E \cap F) \in \{1, 2\}$.

Or $\dim(E\cap F) \neq 2$ car sinon, on aurait :

$E\cap F \subset E$ et $\dim(E\cap F) = \dim E$ donc $F\cap E = E$

$E\cap F \subset F$ et $\dim(E\cap F) = \dim$ donc $F\cap E = F$

Donc $E = F$.

Absurde car par exemple $X^2 \in F$ et $X^2 \notin E$.

$$\frac{2}{3}(X-1) + \frac{1}{3}(X+2) = X$$

<u>Rem</u> : $E \subset \mathbb{R}_1[X]$ et $\dim E = 2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$ donc $E = \mathbb{R}_1[X]$.

$$\boxed{\dim(E\cap F) = 1}$$

3. $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F)$

$= 2+2-1$

$= 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$

Or $E+F \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Donc $E+F = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11 .
On a vu que les espaces F et H de l'exercice 3 sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 .
Posons $E = Vect(X-1, X+2)$ et $F = Vect(X, X^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 .
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1,0,0),(1,2,3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

13 On cherche un sous-espace vectoriel G de E

tq $\underset{\dim = 2}{F} \oplus \underset{\dim = 1}{G} = \underset{\dim = 3}{E}$

On a une base de F : $\underline{\big(\overset{u_1}{\overbrace{(1,0,0)}}, \overset{u_2}{\overbrace{(1,2,3)}}\big)}$

C'est une f.l. de $\mathbb{R}^3$

Pour obtenir un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$

Il suffit de compléter cette f.l. en une base de $\mathbb{R}^3$.

$(1,2,3) - (1,0,0) = (0,2,3)$

→ On pose $u_3 = (0,1,0)$

Montrons que (u_1, u_2, u_3) est libre

...

On pose alors $G = Vect(u_3)$

On a alors une base de $\mathbb{R}^3$ qui est la concaténation d'une base de F et d'une base de G.

Donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

Exercice 14 .

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$ et $u_4 = (1,1,1,1)$. Soient

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$$

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

On a une base de F : (u_1, u_2)

" " " " " G : (u_3, u_4)

Il suffit de montrer que : (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a,0,0,0) + (b,b,0,0) + (c,c,c,0) + (d,d,d,d) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b+c+d = 0 \\ c+d = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a = b = c = d = 0$$

et de de card $4 = \dim \mathbb{R}^4$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$

donc, par le thm de la base adaptée.

$$F \oplus G = \mathbb{R}^4$$

Exercice 17 . Polynômes de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On pose, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1}(X - \alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i - \alpha_k)}$$

1. Pour cette question, et cette question seulement, on prend $n = 2$ et $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 5$ et $\alpha_3 = 7$.
   - **a.** Donner l'expression de L_1, L_2 et L_3.
   - **b.** Donner pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ la valeur de ~~$L_i(\alpha_k)$~~ $L_i(\alpha_k)$
   - **c.** En déduire que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   - **d.** Déterminer les cordonnées d'un polynôme P dans cette base.
   - **e.** Soit f un polynôme de degré 2 tel que $f(2) = 4$; $f(5) = -3$ et $f(7) = 0$. Déterminer f.
2. Reprendre les questions 1.b, 1.c et 1.d dans le cas général.

1. $n = 2$ $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 5$; $\alpha_3 = 7$.

a.

$$L_1(X) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{3}(X - \alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{3}(\alpha_1 - \alpha_k)}$$

$$= \frac{(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}$$

$$= \frac{(X-5)(X-7)}{(2-5)(2-7)} = \frac{(X-5)(X-7)}{15}$$

$$L_1(X) = \frac{1}{15}(X-5)(X-7)$$

$$L_2 = \frac{\prod_{k=1, k\neq 2}^{3} (X-\alpha_k)}{\prod_{k=1, k\neq 2}^{3} (\alpha_2-\alpha_k)}$$

$$= \frac{(X-\alpha_1)(X-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}$$

$$= \frac{(X-2)(X-7)}{(5-2)(5-7)}$$

$$= -\frac{1}{6}(X-2)(X-7).$$

$L_1(\alpha_1)$ $L_1(\alpha_2)$ $L_1(\alpha_3)$

$L_2(\alpha_1)$ $L_2(\alpha_2)$ $L_2(\alpha_3)$