Exercice 15 .

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + 4z = 0\}$ et $F = Vect((1, 0, 0))$.

1. Déterminer une base de E et de F.

2. Montrer que E et F sont supplémentaires.

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in E \iff x - 3y + 4z = 0$

$\iff x = 3y - 4z$

$\iff u = (3y - 4z, y, z)$

$\iff u = y\underbrace{(3,1,0)}_{v_1} + z\underbrace{(-4,0,1)}_{v_2}$

$\iff u \in Vect(v_1, v_2)$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.

$u \in E \iff x = 0$

$\iff u = (0, y, z)$

$\iff u = y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

Donc $E = Vect(v_1, v_2)$

Donc (v_1, v_2) est une fam. gen. de E

Or (v_1, v_2) est libre car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

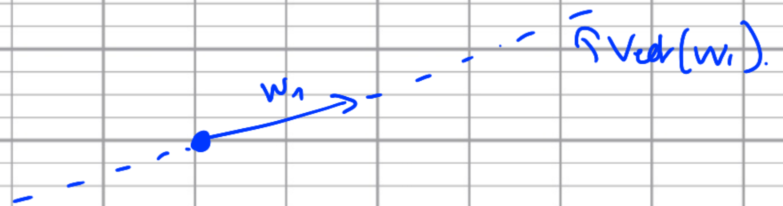
Donc (v_1, v_2) est une base de E.

$F = Vect((1,0,0))$ donc $((1,0,0))$ est une f.g. de F et elle est libre

$(1,0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $((1,0,0))$ est une base de F.

NB : Si $w_1 \neq 0$, $Vect(w_1)$ est une droite vectorielle.



Si w_1 et w_2 sont non colinéaires.

$Vect(w_1, w_2)$ est un plan vectoriel

2\. On a $\dim E + \dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc E et F peuvent être supplémentaires.

Pour prouver que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$, il suffit de prouver que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Soit $u \in E \cap F$. Montrons que $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$u \in F$ donc $u = a(1,0,0) = (a,0,0)$ où $a \in \mathbb{R}$.

$u \in E$ donc $a - 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$,

D'où $a = 0$

Donc $u = (0,0,0)$.

Donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\left.\begin{cases} \dim E + \dim F = \dim(\mathbb{R}^3) \\ E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}\right\} \text{ Donc } \boxed{E \oplus F = \mathbb{R}^3}$$

Autre méthode :

$\big((3,1,0),(-4,0,1)\big)$ est une base de E
$\big((1,0,0)\big)$ est une base de F.

On pose : $\mathcal{B} = \big((3,1,0),(-4,0,1),(1,0,0)\big)$

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
$(\ldots) \leftarrow$ Facile.

On a une base de $\mathbb{R}^3$ qui est la concaténation d'une base de E et d'une base de F.
Donc $\boxed{E \oplus F = \mathbb{R}^3}$

Exercice 17 . Polynômes de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On pose, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(X-\alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_k)}$$

1. Pour cette question, et cette question seulement, on prend $n = 2$ et $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 5$ et $\alpha_3 = 7$.
   a. Donner l'expression de L_1, L_2 et L_3.
   b. Donner pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ et tout $j \in [\![1,3]\!]$ la valeur de $L_i(\alpha_j)$
   c. En déduire que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   d. Déterminer les cordonnées d'un polynôme P dans cette base.
   e. Soit f un polynôme de degré 2 tel que $f(2) = 4$; $f(5) = -3$ et $f(7) = 0$. Déterminer f.
2. Reprendre les questions 1.b, 1.c et 1.d dans le cas général.

1. a. $L_1(X) = \dfrac{(X-5)(X-7)}{(2-5)(2-7)} = \dfrac{1}{15}(X-5)(X-7)$

$L_2(X) = \dfrac{(X-2)(X-7)}{(5-2)(5-7)} = -\dfrac{1}{6}(X-2)(X-7)$

$L_3(X) = \dfrac{(X-2)(X-5)}{(7-2)(7-5)} = \dfrac{1}{10}(X-2)(X-5)$

b. $L_1(\alpha_1) = L_1(2) = \dfrac{(2-5)(2-7)}{(2-5)(2-7)} = 1.$

$L_1(\alpha_2) = L_1(5) = \dfrac{(5-5)(5-7)}{15} = 0$

$L_1(\alpha_3) = L_1(7) = \dfrac{(7-5)\overbrace{(7-7)}^{0}}{15} = 0$

$L_2(X) = \dfrac{(X-2)(X-7)}{\underbrace{(5-2)(5-7)}_{-15}}$

$L_2(\alpha_1) = L_2(2) = \dfrac{(2-2)(2-7)}{} = 0$

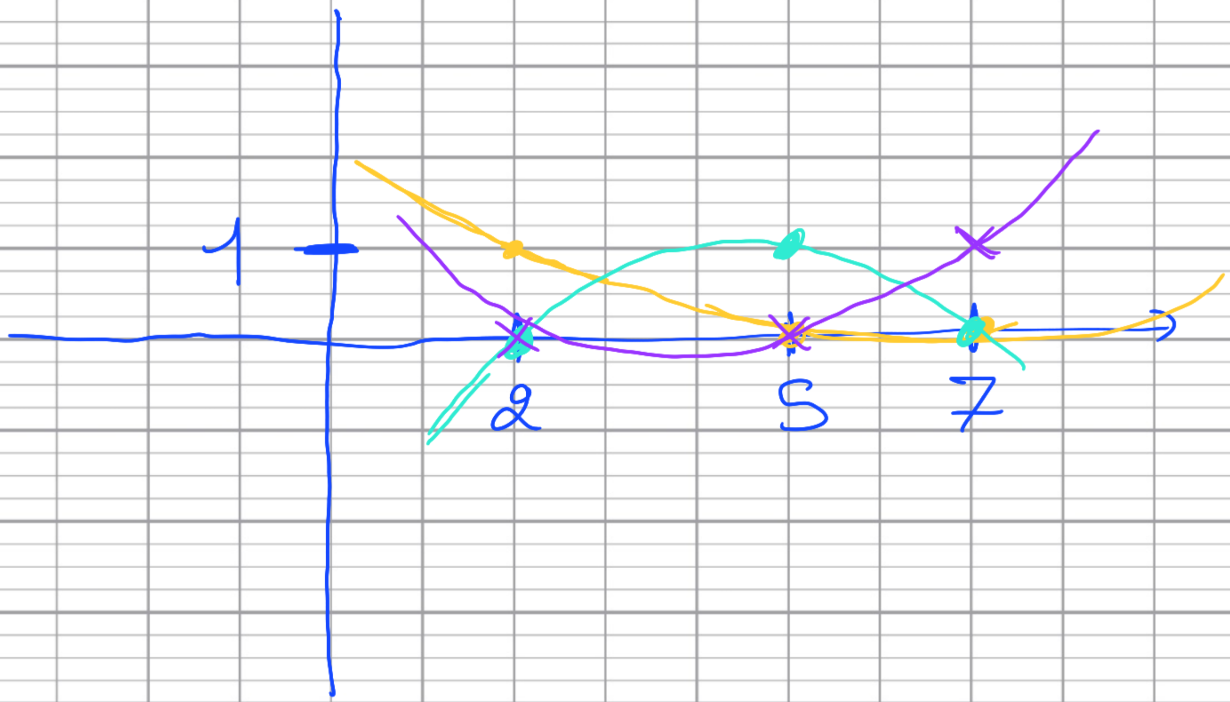
$L_2(\alpha_2) = L_2(5) = \dfrac{(5-2)(5-7)}{(5-2)(5-7)} = 1$

$L_2(\alpha_3) = L_2(7) = 0$

$L_3(\alpha_1) = 0$

$L_3(\alpha_2) = 0$

$L_3(\alpha_3) = 1.$



c. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{aL_1(X) + b\,L_2(X) + c\,L_3(X) = 0}_{\text{vraie pour tout } X \in \mathbb{R}.}$$

Montrons que $a=b=c=0$.

. Avec $X = \alpha_1$:

$$a\,L_1(\alpha_1) + b\,L_2(\alpha_1) + c\,L_3(\alpha_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \times 1 + b \times 0 + c \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

. Avec $X = \alpha_2$

$$a\,L_1(\alpha_2) + b\,L_2(\alpha_2) + c\,L_3(\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + b + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

. Avec $X=\alpha_3$, on obtient $c=0$.

Donc la famille (L_1, L_2, L_3) est libre.
Or $\mathrm{Card}(L_1, L_2, L_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$
Donc (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coord. de P dans (L_1, L_2, L_3).

$$P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3.$$

$$\Leftrightarrow P(X) = \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \lambda_3 L_3(X)$$

Avec $X=\alpha_1$

$$P(\alpha_1) = \lambda_1 \overbrace{L_1(\alpha_1)}^{1} + \lambda_2 \overbrace{L_2(\alpha_1)}^{0} + \lambda_3 \overbrace{L_3(\alpha_1)}^{0}$$

$$\Leftrightarrow P(\alpha_1) = \lambda_1$$

De même : $P(\alpha_2) = \lambda_2$ et $P(\alpha_3) = \lambda_3$.

Donc : $\boxed{\text{les coord. de } P \text{ dans la base } (L_1, L_2, L_3) \text{ sont } (P(\alpha_1), P(\alpha_2), P(\alpha_3))}$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = P(\alpha_1) L_1(X) + P(\alpha_2) L_2(X) + P(\alpha_3) L_3(X)}$$

e) $f \in \mathbb{R}_2[X]$; $f(2)=4$; $f(5)=-3$; $f(7)=0$

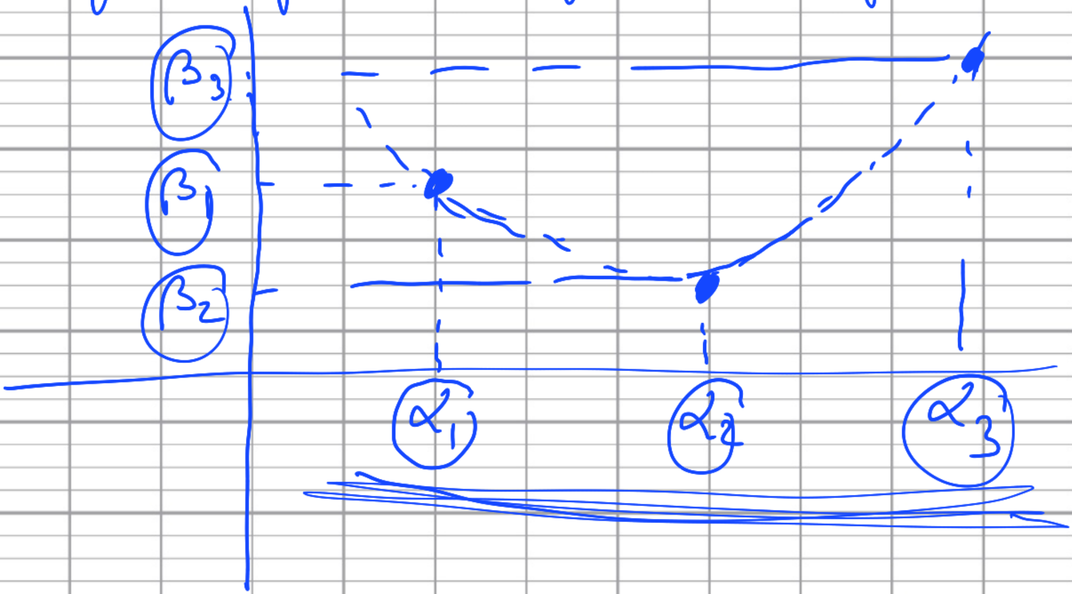
On pourrait écrire : $\underline{f(x)=ax^2+bx+c}$.

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ f(5)=-3 \\ f(7)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+2b+c=4 \\ 25a+5b+c=-3 \\ 49a+7b+c=0 \end{cases}$$

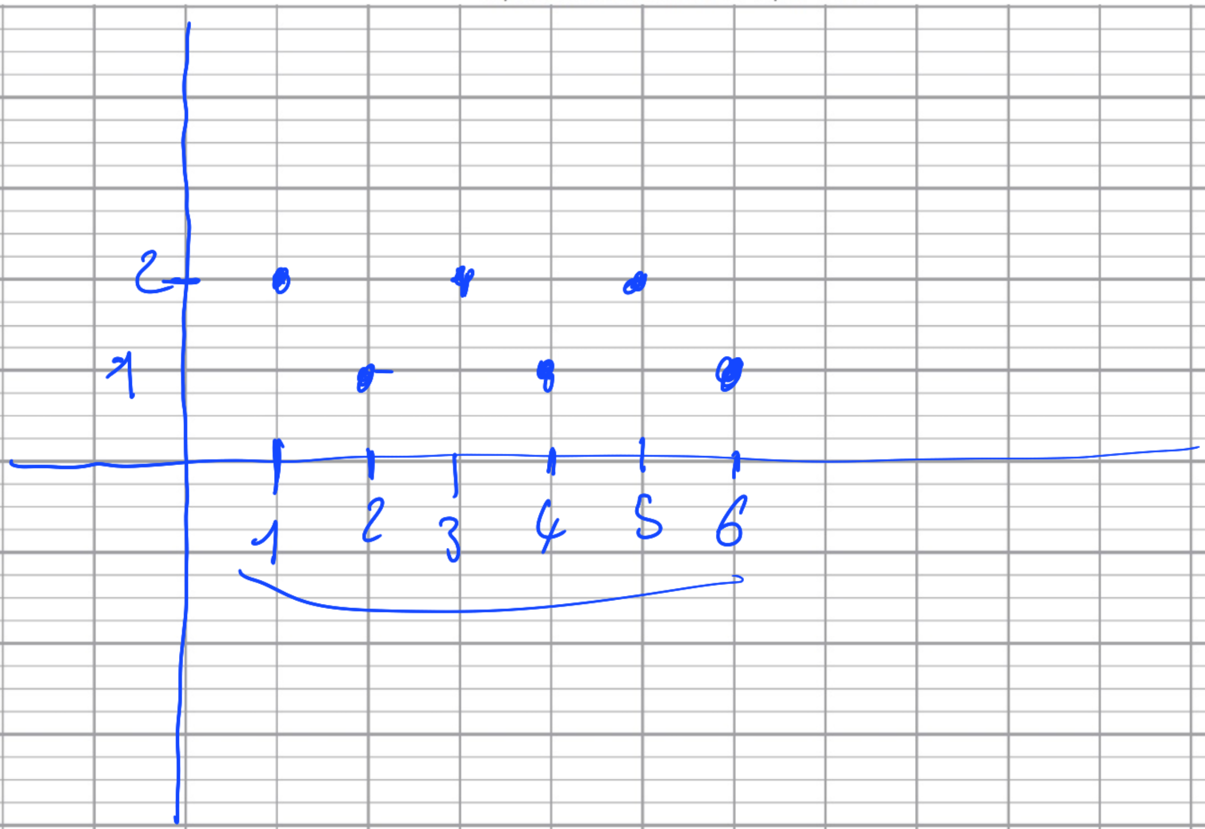
$\iff \ldots$

Avec $\underline{L_1}$, $\underline{L_2}$ et $\underline{L_3}$:

$$f(x)=f(2)L_1(x)+f(5)L_2(x)+f(7)L_3(x)$$



$$f(x)=\beta_1 L_1(x)+\beta_2 L_2(x)+\beta_3 L_3(x)$$


2
1
1
2
3
4
5
6