Chapitre 18

Séries

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}$ peut être remplacé par $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premiers exemples

Étant donné dune suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on s'intéresse souvent à la somme des termes de (u_n) :

$$\begin{aligned} S_n &= u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} u_k \end{aligned}$$

1.1 Définition et notation d'une série

Définition 1. (Série)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite définie à partir d'un rang n_0.
On appelle "**série de terme général** u_n" la suite (S_n) définie pour tout $n \geq n_0$ par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Soit encore :

$$S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$$

La série de terme général u_n se note

$$\sum_{n\geq n_0} u_n.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le premier terme, on note parfois tout simplement la série

$$\sum u_n.$$

$\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est le terme de rang n de cette série, on l'appelle **somme partielle d'indice** n

Exemple 1. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est la série de terme général $\frac{1}{n}$. C'est une suite dont les premiers termes sont :

- $1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n} = H_1$
- $1 + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n} = H_2$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n} = H_3$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = H_4$
- Etc.

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n$
- $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = H_N$

Attention : il y a ici une subtilité à laquelle il faut bien faire attention si on ne veut pas écrire n'importe quoi. Prenons l'exemple de la série harmonique vue ci-dessus. On pose, pour tout $n \geq 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors :

- $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ signifie exactement la même chose que $(H_n)_{n\geq 1}$ (la série toute entière)
- $\sum \frac{1}{n}$ signifie exactement la même chose que (H_n) (la série tout entière, sans donner le premier indice)
- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est égal à H_n : c'est le terme de rang n de la série ou encore la somme partielle d'indice n.

Attention ! $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ n'est donc pas un nombre ! (c'est une série, donc une suite d'un genre particulier.)

Exercice de cours 1. Travail sur le vocabulaire (*Voir la correction*)

1. Donner la somme partielle d'indice 3 de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^3+1}$.
2. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général n^2. Donner une expression simple de S_n.

1.2 Série convergente ou divergente, somme d'une série convergente

Définition 2. (Convergence d'une série, somme d'une série convergente)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

Dire que **la série** $\sum_{n\geq n_0} u_n$ **converge** signifie que la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$ existe et est finie.

On note alors :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Cette limite est appelée **somme de la série** $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge. Si elle tend vers $+\infty$, on dit qu'elle diverge vers $+\infty$.

Remarque. On peut bien sûr noter indifféremment $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ ou $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ (voir l'exemple ci-dessous)

Exemple 2. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ *converge et donner sa somme.*

Remarque : cette série est appelée série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Rédaction 1 :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{n}{n^3+1} = 0 + \frac{1}{1^3+1} + \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} = \dots$

2. La série de terme général n^2 est $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{ou} \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} n^2$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

Rédaction 2 :
Pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

1.3 Trois propositions élémentaires

Proposition 1. (Convergence d'une série télescopique) (*Voir la preuve*)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La série $\sum_{n\geq n_0} u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et on connaît sa limite si on connaît celle de (u_n).

Remarque.

- Cette proposition est une conséquence directe du télescopage, puisque $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$.
- Parfois, pour étudier une suite (u_n), on étudie la série $\sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$. (Voir exercices).

Exercice de cours 2.
Démontrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

La proposition suivante est très très utile et vous devez donc la connaître et la comprendre !!

Proposition 2. (Retrouver la suite à partir de la série) (*Voir la preuve*)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ (donc $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$). On a :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = S_{n+1} - S_n.$$

$$\forall n > n_0, \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Bientôt, on écrira

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}}$

Rem: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty.$

$\sum_{n \geq 1} n^2$ diverge grossièrement.

Proposition 3. (Condition nécessaire de convergence.) (*Voir la preuve*)

$$\text{Si la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Remarque. On utilisera plutôt la contraposée de cette proposition : si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. *Dans ce cas, on dit que la série diverge grossièrement.*

Exercice de cours 3. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3n+2}$.

Remarque : "Étudier la nature" d'une série signifie déterminer s'il s'agit d'une suite convergente ou divergente

$\frac{n}{3n+2} \sim \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{n}{3n+2} \to \frac{1}{3} \neq 0$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3n+2}$ diverge grossièrement.

1.4 Linéarité

Proposition 4. (multiplier une série par un scalaire non nul ne change pas sa nature.) (*Voir la preuve*)
Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature et **en cas de convergence** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Exemple 3. On a vu que $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et que sa somme vaut $\frac{3}{2}$ on en déduit que la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{2}{3^n}$ converge et que sa somme vaut 3.

Proposition 5. (Combinaison linéaire de deux séries convergentes) (*Voir la preuve*)
Si les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont convergentes, alors, pour tous réels λ et μ la série $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \quad (*)$$

Remarque.

1. L'ensemble des séries convergentes est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.
2. La propriété de linéarité vue sur les sommes finies reste donc vraie pour les séries, à condition que toutes les séries en jeu soient convergentes.
3. **Attention !** On ne peut écrire la relation $(*)$ que si les deux séries sont convergentes ! !
   Par exemple pour $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{n}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + v_k$ a un sens mais $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ n'en a pas !
   (puisqu'on a vu que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et que nous verrons que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{n}$ aussi)

Remarque. Les deux propositions ci-dessus sont très importantes mais nous les utiliserons assez peu dans les premiers temps. Il faut donc bien les apprendre !

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques et séries géométriques dérivées

Proposition 6. (Séries géométriques) (*Voir la preuve*)
La série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ est convergente si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Généralisation :
La série géométrique $\sum_{n\geq p} x^n$ est convergente si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} x^k = \frac{x^p}{1-x}.$$

Proposition 7. (Dérivée et dérivée seconde des séries géométriques) (*Voir la preuve*)

1. La série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. La série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Exercice de cours 4.
Soit $x \in]-1,1[$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ converge et déterminer sa somme.
Indication : En utilisant le fait que $n^2 = n(n-1)+n$, faire apparaître les dérivées d'une série géométrique.

2.2 Série exponentielle

Proposition 8. (Série exponentielle) (*Voir la preuve*)

Pour tout réel x, la série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Exemple 4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ convergent et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

2.3 Séries de Riemann

Proposition 9. (Séries de Riemann) (preuve faite en cours)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée "série de Riemann". Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 5.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergent
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ convergent (mais la proposition ne nous donne pas leur somme).

Remarque. La proposition ci-dessus ne nous donne pas la somme en cas de convergence.
Pour votre culture générale, vous pouvez retenir que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Problème de Bâle, résolu en 1743 par Euler) et qu'on ne connaît pas d'expression simple, à partir des fonctions et des constantes usuelles (π, e, etc...), de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ on sait juste que ce nombre est irrationnel (prouvé par Roger Apéry en 1978 qui a donné son nom à ce nombre : constante d'Apéry)

3 Critères de convergence des séries.

Dans toute cette section, on va donner des critères pour déterminer si une série converge ou diverge. C'est le cœur de l'étude des séries. Tous ces critères permettent d'étudier la convergence d'une série. Mais, en cas de convergence, ils ne donnent pas la somme de la série.

Comme vous le verrez, on sait bien étudier les séries à termes positifs et on essaie toujours, si possible, de se ramener à ce cas.

3.1 Critères de convergence des séries à termes positifs.

Tous ces critères s'appliquent également à des séries qui ne seraient que positives à partir d'un certain rang.
Attention : Dire que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est à termes positifs (à partir d'un certain rang), signifie que la suit (u_n) est positive (à partir d'un certain rang).

3.1.1 Condition nécessaire et suffisante (CNS) de convergence

Proposition 10. (CNS de convergence des séries à termes positifs.) (*Voir la preuve*)
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série **à termes positifs**.

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge **si et seulement si** la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Sinon, la série diverge vers $+\infty$.
Autrement dit : *une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.*

Remarque. Il est assez rare (mais ça peut arriver) qu'on utilise directement la proposition ci-dessus qui n'est que la version "Série" du théorème de convergence des suites monotones. Mais c'est le point de départ de toutes les propositions suivantes.

3.1.2 Critère de comparaison

Proposition 11. (Critère de comparaison des séries à termes positifs.) (*Voir la preuve*)
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :

1. Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Remarque. Le point 2 n'est que la contraposée du point 1.

3.1.3 Critère d'équivalence

Proposition 12. (Équivalence à une série à termes positifs.) (*Voir la preuve*)
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries, $\sum_{n\geq 0} v_n$ étant à termes positifs (à partir d'un certain rang).

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} v_n \text{ sont de même nature.}$$

Remarque. Cette propriété est également vraie si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est à termes négatifs (à partir d'un certain rang).

Voici deux exercices à titre d'exemple :

Exercice de cours 5.
Déterminer la nature (c'est-à-dire est-ce qu'elle converge ou diverge) de la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Retrouvez ensuite ce résultat sans le critère d'équivalence.

Exercice de cours 6.
Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2n^2+n-1}$.

3.1.4 Critère de négligeabilité

Proposition 13. (Négligeabilité devant une série à termes positifs convergente) (*Voir la preuve*)
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries, $\sum_{n\geq 0} v_n$ étant à termes positifs (à partir d'un certain rang).

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{v}_n) \text{ alors } \left(\sum_{n\geq 0} \mathrm{v}_n \text{ converge } \implies \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}\right).$$

.

Remarque. Cette propriété est également vraie si $\sum_{n\geq 0} v_n$ étant à termes négatifs (à partir d'un certain rang).

Méthode à retenir n° 1

Montrer qu'une série converge en la comparant à une série de Riemann

Pour montrer qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on pourra essayer de regarde la limite de $n^2 u_n$.
En effet, si $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, cela signifie que $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, le critère de négligeabilité permet de conclure.
On utilise très souvent cette méthode ! !
Parfois il faut être plus subtile et trouver un $\alpha \in]1,2[$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$. *Là encore, cela signifie que* $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *et comme comme* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge, le critère de négligeabilité permet de conclure.*

Exercice de cours 7. Montrer que la suite $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{(n+1)!}$ converge.

3.2 Convergence Absolue

On a vu qu'il existe beaucoup de critères pour les séries à termes positifs. On va maintenant voir qu'on peut presque toujours se ramener à ce cas grâce à la convergence absolue.

Définition 3. (Série absolument convergente)
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente

Exemple 6.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.
2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est convergente.

Remarque : ces deux séries ont la "forme suivante" :

1. $\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - +\frac{1}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
2. $\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - +\frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (c'est la série harmonique alternée)

Proposition 14. (convergence absolue implique convergence) (admis)

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente

Exemple 7. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est convergente car elle est absolument convergente.

Là encore, cette proposition ne donne pas la somme de la série. On sait donc que $\sum_{k\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ existe mais la proposition ne nous donne pas sa valeur.

Attention : La réciproque de la proposition ci-dessus est **fausse** ! Le contre-exemple le plus fameux est celui de la série harmonique alternée. On montrera en effet en exercice que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge alors qu'on vient de voir qu'elle n'est pas absolument convergente.

3.3 Méthode générale d'étude de la convergence d'une série.

Méthode à retenir n° 2

Étudier la convergence d'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Cette méthode vise à vous guider face à l'étude d'une série. Mais le plus souvent c'est l'énoncé qui vous guide. Néanmoins vous serez plus à l'aise avec les séries si vous avez une marche à suivre. Par contre cette méthode n'est pas magique : il peut exister des cas qui ne rentrent pas exactement dans le cadre de cette méthode. Mieux vaut avoir un peu de recul et avoir bien compris la méthode pour pouvoir l'adapter en fonction de la situation.

1. Vérifier que la série ne diverge pas grossièrement (donc vérifier que (u_n) tend bien vers 0).
2. Si la série est à termes positifs, passer à l'étape suivante, sinon considérer $|u_n|$ (dans le but de prouver la convergence absolue).
3. On considère ici que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs.
   (a) Regarder si u_n est le terme général (ou λ fois ce terme général) d'une série de référence ! Ce serait dommage de passer à côté.
   (b) Sinon chercher un équivalent de u_n et regarder si cet équivalent est le terme général (ou λ fois ce terme général) d'une série de référence.
   (c) Sinon étudier si $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (voir méthode vue plus haut).
   (d) Sinon chercher un $\alpha \in]1, 2[$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Si toute la démarche ci-dessus n'aboutit pas, regarder si par hasard la série ne serait pas télescopique.

Remarque : on peut regarder si la série est télescopique avant le point $2d$ qui est le cas le plus difficile.

4 Reste d'une série convergente

Définition 4. (Reste d'une série convergente)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. On appelle **reste d'indice** n de la série le réel $R_n = S - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. **On ne peut parler de reste que si la série est convergente.**

Proposition 15. (Caractérisation du reste d'une série convergente) (*Voir la preuve*)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et R_n le reste d'indice n d'une série convergente $\sum_{n\geq 0} u_n$.

On a, d'une part :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et d'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

5 Preuves et solutions

5.1 Preuves

Preuve de la proposition 1

Soit $n \geq n_0$, on a $\sum_{k=n_0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_{n_0}$ par télescopage.
On a donc convergence de la somme partielle si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge.
(*retour à la proposition 1*)

Preuve de la proposition 2

Il suffit de constater que, pour tout $n \geq n_0$, :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n+1}.$$

et de même, pour tout $n > n_0$, :

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k = u_n.$$

(*retour à la proposition 2*)

Preuve de la proposition 3

On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
Si (S_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$.
Or, $\forall n > n_0, u_n = S_n - S_{n-1}$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell - \ell = 0$.
(*retour à la proposition 3*)

Preuve de la proposition 4

Si on note respectivement S_n et T_n les sommes partielles d'indice n de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ (C'est-à-dire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k$). On a, par linéarité des sommes finies : $T_n = \lambda S_n$ donc (T_n) et (S_n) sont de même nature et, en cas de convergence, $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n$.
(*retour à la proposition 4*)

Preuve de la proposition 5

Si on note respectivement S_n, T_n et U_n les sommes partielles d'indice n de $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n + \mu v_n$ (C'est-à-dire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + \mu v_k$). On a, par linéarité des sommes finies : $U_n = \lambda S_n + \mu T_n$ donc, si (S_n) et (T_n) convergent, alors (U_n) converge et on a alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n + \mu \lim_{n\to+\infty} T_n$.
(*retour à la proposition 5*)

Preuve de la proposition 6

Prouvons directement la généralisation.
Pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $n \geq p$, on a : $\sum_{k=p}^{n} x^k = \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x}$. Or (x^{n+1}) converge si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas a pour limite 0. D'où le résultat.
(*retour à la proposition 6*)

Preuve de la proposition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. On dérive cette égalité et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Le terme de droite admet une limite si et seulement si $|x| < 1$ et cette limite vaut alors $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Le b) se démontre de même en dérivant une fois de plus.

(*retour à la proposition 7*)

Preuve de la proposition 8

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{\max(e^x, 1)|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car le maximum de l'exponentielle entre 0 et x est 1 si $x < 0$ et est e^x si $x \geq 0$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\max(e^x, 1)|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on a la convergence et la limite de la série exponentielle.
(*retour à la proposition 8*)

Preuve de la proposition 10

Pour tout $n \geq 0$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ (car la série est à termes positifs) donc la suite (S_n) est croissante. Donc elle a une limite qui est soit $+\infty$ (si (S_n) n'est pas majorée), soit une limite finie (si (S_n) est majorée).
(*retour à la proposition 10*)

Preuve de la proposition 11

Quitte à changer les premiers termes de la série (ce qui ne change pas sa nature), on peut suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \mathrm{v}_n$. Si $\sum\limits_{k \geq 0} \mathrm{v}_k$ converge, alors on en déduit que

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{v}_k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{v}_k < +\infty$, donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est majorée et la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge.
(*retour à la proposition 11*)

Preuve de la proposition 12

Si $un \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc il existe un rang à partir duquel $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{3}{2}$ c'est-à-dire tel que $\dfrac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \dfrac{3}{2} v_n$.
Alors, si $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge, $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{3}{2} v_n$ converge et donc, par le critère de comparaison, $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge. Et de même, si $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge, $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{2} v_n$ converge par le critère de comparaison et donc $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge.
Le point 2 n'est que la contraposée du point 1.
(*retour à la proposition 12*)

Preuve de la proposition 13

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc il existe un rang à partir duquel $\dfrac{u_n}{v_n} \leq 1$ c'est-à-dire tel que $u_n \leq v_n$ (puisque $v_n > 0$).

Alors, par le critère de comparaison, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(*retour à la proposition 13*)

Preuve de la proposition 15

Soit $N \geq n$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_{n,N} = \sum_{k=n+1}^{N} u_k$. Alors $S_n + T_{n,N} = \sum_{k=0}^{N} u_k = S_N$.

Donc $\lim_{N\to+\infty} S_n + T_{n,N} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$.

Or $\lim_{N\to+\infty} S_n + T_{n,N} = S_n + \lim_{N\to+\infty} T_{n,N} = S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

D'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n = R_n$. $(*)$

D'autre part, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

(*retour à la proposition 15*)