Feuille d'exercices n°19 - Séries

Exercice 1 .

Déterminer la nature des séries numériques suivantes et, lorsque c'est possible, leur somme.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)}$

Exercice 2 .

Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, déterminer leur somme :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n2^n$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{3^n}$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\sqrt{n}$
5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n\, n!}$
7. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{(n-1)}{2^n}$
8. $\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}$

Exercice 3 .

Prouver que les séries ci-dessous convergent et déterminer leur somme.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{(n+1)!}$ 1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n+1)!}$

Exercice 4 .

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n^2}$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\ln(n)\,\mathrm{e}^{-n}$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+\ln(n))}$
7. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)$
8. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^3}$
9. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)^n$

Exercice 5 . Pour s'entrainer

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{2^n}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{3n^3-4n+1}$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$
5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Exercice 6 . Pour devenir un.e as du calcul des séries « calculables ».

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k\in\mathbb{N}$ fixé et $x\in\mathbb{R}_+^*$) :

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$
b) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{4^n}$
c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
d) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$
e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{5^n}$
f) $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$
g) $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{n!}$
h) $\sum_{n\geq 2} ne^{-n}$
i) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$
j) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$
k) $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k}\frac{a^k b^{n-k}}{n!}$
l) $\sum_{n\geq k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$
m) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$

Exercice 7 .

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
2. En remarquant un télescopage, montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8 .

Soit $a \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que (u_n) décroit vers 0.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
4. En déduire que la série de terme général $\sum u_n$ diverge .

Exercice 9 . Série harmonique alternée.

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, pour tout $n \geqslant 1$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la suite (S_{2n}) est une suite décroissante.
2. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est une suite croissante.
3. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Exercice 10 . Généralisation : critère spécial des séries alternées.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et tendant vers 0.
   Montrer que la série $\sum (-1)^n f(n)$ converge.
   On s'inspirera de l'exercice précédent.

2. Applications :
   (a) Redémontrer que $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.
   (b) Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ converge mais ne converge pas absolument.
   (c) Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ converge mais ne converge pas absolument.
   (d) Étudier la nature de $\sum \sin \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 11 . Comparaison série- intégrale

Soit f une fonction définie et décroissante sur un intervalle $[n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On va étudier la série $\sum f(n)$
On pose, pour tout $n \geq n_0$:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

1. Reprendre la démonstration de la convergence des séries de Riemann pour prouver que (S_n) et (I_n) sont de même nature.
2. Application :
   a. Déterminer la nature de $\frac{1}{n \ln n}$.
   b. Soit $\alpha > 0$. Déterminer selon la valeur de α la nature de $\frac{1}{n\,(\ln \alpha)^\alpha}$.

Exercice 12 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \, dt$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Calculer $u_{n+2} + u_n$.
4. Montrer que, en utilisant les deux questions précédentes, que pour $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

5. En déduire un équivalent de u_n.
6. Déterminer, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^\alpha}$.

Exercice 13 . Série géométrique primitivée

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt.$$

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \qquad \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 0[, \qquad \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.