Exercice 10 .

On appelle « hyperplan » d'un espace vectoriel E de dimension n tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et H_1 et H_2 deux hyperplans **distincts** de E. Démontrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$$

2. En déduire que l'intersection de deux plans vectoriels *distincts* de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle.

1. On a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2)$

Or $\dim(H_1 + H_2) \leq n$

Donc $\dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) \geq n-1+n-1-n$

Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2$.

De plus $H_1 \cap H_2 \subset H_1$, donc $\dim(H_1 \cap H_2) \leq n-1$.

Or $\dim(H_1 \cap H_2) \neq n-1$ car sinon on aurait

$H_1 \cap H_2 = H_1$ donc $H_1 \subset H_2$ or $\dim H_1 = \dim H_2$

d'où $H_1 = H_2$: absurde car H_1 et H_2 sont distincts.

D'où $n-2 \leq \dim(H_1 \cap H_2) < n-1$.

Donc $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n-2}$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, les plans vectoriels sont des hyperplans (ils sont de dimension $3-1$).

Donc l'intersection de 2 plans distincts est de dimension $3-2=1$: c'est une droite vectorielle.

Exercice 17 FE 18

Exercice 17 . Polynômes de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On pose, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(X-\alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_k)}$$

1. Pour cette question, et cette question seulement, on prend $n = 2$ et $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 5$ et $\alpha_3 = 7$.
   - **a.** Donner l'expression de L_1, L_2 et L_3.
   - **b.** Donner pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ et tout $j \in [\![1,3]\!]$ la valeur de $L_i(\alpha_j)$
   - **c.** En déduire que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   - **d.** Déterminer les cordonnées d'un polynôme P dans cette base.
   - **e.** Soit f un polynôme de degré 2 tel que $f(2) = 4$; $f(5) = -3$ et $f(7) = 0$. Déterminer f.
2. Reprendre les questions 1.b, 1.c et 1.d dans le cas général.

2. b. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$ et $j \in [\![1, n+1]\!]$

Si $j \neq i$: $L_i(\alpha_j) = \dfrac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_j-\alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_k)} = 0$

Lorsque $k=j$, $\alpha_j - \alpha_k = 0$

Si $j = i$, $L_i(\alpha_i) = \dfrac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_k)} = 1.$

Donc $\boxed{L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}}$

c. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i = 0$.

Montrons que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$,

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i(x) = 0$

$$\text{Donc } \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i(\alpha_k)}_{\lambda_k} = 0$$

$$\iff \lambda_k = 0 \quad \text{car } L_i(\alpha_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

D'où $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $\lambda_k = 0$

Donc la famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est libre, incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et de cardinal $n+1$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

d. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Notons $(a_1, \dots, a_{n+1})$ ses coordonnées dans la base $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$.

On a : $P = \sum_{i=1}^{n+1} a_i L_i$

Alors, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$.

$$P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i L_i(\alpha_k) \underset{\uparrow}{=} a_k.$$

$$L_i(\alpha_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

Donc les coordonnées de P dans $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont :

$$\left(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_{n+1})\right)$$

D'où : $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\alpha_i) L_i(X)$

Exercice 18 . Espaces vectoriels de Polynômes :

Dans toute la suite du problème on note $E = \mathbb{R}_6[\mathbf{X}]$ et on s'intéresse aux ensembles suivants

$$F = \{\delta\mathbf{X}^6 + \alpha\mathbf{X}^5 + \beta\mathbf{X}^4 + \gamma\mathbf{X}^3 + \beta\mathbf{X}^2 + \alpha\mathbf{X} + \delta,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$$
$$G = \{\lambda\mathbf{X}^3 + \mu\mathbf{X}^2 + \mu\mathbf{X} + \lambda,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$H = \{P \in E,\ P'(-1) = 0\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que sa dimension.
2. Jusitifer que tous les éléments de G soient divisible par le polynôme $\mathbf{X} + 1$.
3. **Etude de F et de G**
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Donner une base de F et une de base de G. En déduire $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
   (c) A-t-on $F \oplus G$? $E = F \oplus G$?
4. **Etude de H**
   (a) Sans en chercher une famille génératrice, montrer que H est un sous-espace vectoriel de E. **pts]**
   (b) Sans en chercher une famille génératrice, montrer que $\dim(H) \leq 6$.
   (c) Montrer que $\mathcal{F} = (1, (\mathbf{X}+1)^2, (\mathbf{X}+1)^3, (\mathbf{X}+1)^4, (\mathbf{X}+1)^5, (\mathbf{X}+1)^6)$ est une famille libre d'éléments de H.
   (d) Justifier soigneusement que $\dim(H) = 6$.
5. **Etude de $G \cap H$**
   (a) Justifier que $1 \leq \dim(G \cap H) \leq 2$.
   (b) Expliquer pourquoi un des deux choix est absurde.
   (c) Montrer que tout polynôme de $G \cap H$ admet -1 comme racine multiplie.
   (d) En déduire une base de $\dim(G \cap H)$.

1. $E = \mathbb{R}_6[X]$

La base canonique de E est $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$.

$\dim E = 7$.

2. Soit $P \in G$. Montrons que $X+1 \mid P$.

$P(X) = \lambda X^3 + \mu X^2 + \mu X + \lambda$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(Rappel : $X - a \mid P \iff P(a) = 0$)

$$\boxed{P(-1) = -\lambda + \mu - \mu + \lambda = 0 \text{ donc } X+1 \mid P.}$$

3. a. Soit $P \in E$

$$P \in F \iff P = \delta X^6 + \alpha X^5 + \beta X^4 + \gamma X^3 + \beta X^2 + \alpha X + \delta$$
$$\iff P = \delta(X^6+1) + \alpha(X^5+X) + \beta(X^4+X^2) + \gamma X^3$$
$$\iff P \in \mathrm{Vect}(X^6+1, X^5+X, X^4+X^2, X^3)$$

Donc $F = \mathrm{Vect}(X^6+1, X^5+X, X^4+X^2, X^3)$

Donc $\boxed{F \text{ est bien un s.e.v. de } E = \mathbb{R}_6[X].}$

$$P \in G \iff P = \lambda X^3 + \mu X^2 + \mu X + \lambda$$
$$\iff P = \lambda(X^3+1) + \mu(X^2+X)$$
$$\iff P \in \mathrm{Vect}(X^3+1, X^2+X)$$

Donc $G = \mathrm{Vect}(X^3+1, X^2+X)$

Donc $\boxed{G \text{ est bien un s.e.v. de } E = \mathbb{R}_6[X].}$

b. On a vu que $(X^6+1, X^5+X, X^4+X^2, X^3)$ est une f.g de F, or elle est libre car échelonnée en degrés.

Donc c'est une base de F

Donc $\dim F = 4$.

(Idem pour G ; $\dim G = 2$).

c. Soit $P \in F \cap G$.

$P \in F$ donc $P = \delta X^6 + \alpha X^5 + \beta X^4 + \gamma X^3 + \beta X^2 + \alpha X + \delta$

avec $(\delta, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$.

$P \in G$ donc $P = \lambda X^3 + \mu X^2 + \mu X + \lambda$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

On a alors :

$$\delta X^6 + \alpha X^5 + \beta X^4 + \gamma X^3 + \beta X^2 + \alpha X + \delta = \lambda X^3 + \mu X^2 + \mu X + \lambda$$

$$\iff \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \lambda \\ \beta = \mu \\ \alpha = \mu \\ \delta = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc } F \cap G = \{0\} \iff F \oplus G}$$

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$
$$= 6 \neq \dim E$$

Donc $\boxed{F \oplus G \neq E}$

4

a) $H = \{P \in E \mid P'(-1) = 0\}$

$$F = \{\delta \mathbf{X}^6 + \alpha \mathbf{X}^5 + \beta \mathbf{X}^4 + \gamma \mathbf{X}^3 + \beta \mathbf{X}^2 + \alpha \mathbf{X} + \delta,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$$
$$G = \{\lambda \mathbf{X}^3 + \mu \mathbf{X}^2 + \mu \mathbf{X} + \lambda,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$H = \{P \in E,\ P'(-1) = 0\}$$

- $H \subset E$
- $H \neq \emptyset$ car le polynôme nul appartient à H.
- Soit $(P, Q) \in H^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $\underbrace{aP + bQ}_{R} \in H$.

$$R'(-1) = aP'(-1) + bQ'(-1)$$
$$= 0 + 0 \quad \text{car } P \in H \text{ et } Q \in H.$$

Donc $R \in H$

Donc $\boxed{H \text{ est un s.e.v. de } E}$

4b)

H est un s.ev. de E

Donc $\dim H \leqslant 7$

Or $\dim H \neq 7$ car sinon on aurait $H = E$

Absurde car $X \in E$ mais $X \notin H$

Donc $\boxed{\dim H \leqslant 6}$

4c)

(c) Montrer que $\mathcal{F} = (1, (\mathbf{X}+1)^2, (\mathbf{X}+1)^3, (\mathbf{X}+1)^4, (\mathbf{X}+1)^5, (\mathbf{X}+1)^6)$ est une famille libre d'éléments de H.

(d) Justifier soigneusement que $\dim(H) = 6$.

$\mathcal{F}$ est libre car échelonnée en degré.

- $1 \in H$ car $(1)' = 0$
- $\forall k \in [\![2, 6]\!]$, $P_k = (X+1)^k \in H$

car : • $(X+1)^k \in E$

• $P_k'(X) = k(X+1)^{k-1}$ avec $k-1 \geqslant 1$.

$P_k'(-1) = k \times 0^{k-1} = 0$ car $k-1 \geqslant 1$.

Autre possibilité :

$(X+1)^2$ divise $(X+1)^k = (X+1)^2(X+1)^{k-2}$

Donc -1 est racine d'ordre au moins 2 de $(X+1)^k$.

Donc $P_k'(-1) = 0$.

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre de H.

4d) • Supposons, par l'absurde, que $\dim H < 6$.
Posons $n = \dim H$.
Toute famille libre de H a au plus n éléments.
Absurde car $\mathcal{F}$ a 6 éléments.

<u>Autre méthode :</u>
$\mathcal{F}$ est libre, donc $\mathcal{F}$ est une base de $Vect(\mathcal{F})$
donc $\dim(Vect(\mathcal{F})) = 6$
$\mathcal{F}$ est une famille de H donc $Vect(\mathcal{F}) \subset H$.
$\dim(Vect(\mathcal{F})) \leqslant \dim H$
donc $6 \leqslant \dim H \leqslant 6$

5. Etude de $G \cap H$

(a) Justifier que $1 \leq \dim(G \cap H) \leq 2$.

(b) Expliquer pourquoi un des deux choix est absurde.

(c) Montrer que tout polynôme de $G \cap H$ admet -1 comme racine multiplie.

(d) En déduire une base de $\dim(G \cap H)$.

5. a. $G \cap H \subset G$
donc $\dim(G \cap H) \leqslant \dim G = 2$.
Or $\dim(G \cap H) \neq 0$
$\dim(G+H) \leqslant 7$ (car $G+H$ est un s.e.v de E).
$\iff \dim G + \dim H - \dim(G \cap H) \leqslant 7$
$\iff 2 + 6 - 7 \leqslant \dim(G \cap H)$
$\iff 1 \leqslant \dim(G \cap H)$
Donc $1 \leqslant \dim(G \cap H) \leqslant 2$

b. Supposons que $\dim(G\cap H) = 2 = \dim G$.

Alors (puisque $G\cap H \subset G$) $G\cap H = G$

Or $G\cap H \subset H$

Donc $G \subset H$

Absurde car $P = X^3+1 \in G$ $(\lambda=1, \mu=0)$

Or $P'(-1) = 3 \neq 0$.

Donc $P \notin H$

Donc $G \not\subset H$.

(**Rem:** $\dim(F\cap G) = \dim F \Rightarrow F \subset G$
$\dim(F\cap G) = \dim G \Rightarrow G \subset F$)

donc $\dim(G\cap H) = 1$.

c. Soit $P \in G\cap H$

$P\in G$ donc $X+1 \mid P$ (question a)

Donc -1 racine de P.

$P\in H$ donc $P'(-1) = 0$

Donc -1 racine de P et de P' : -1 est racine au moins double de P.

d. $\dim(G\cap H) = 1$. Pour trouver une base de $G\cap H$ il suffit un polynôme non nul de $G\cap H$.

$P = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \in G$

$P = (X+1)^3 \in H$ car -1 en est racine triple.

donc $P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0$.

Donc $\boxed{\left((X+1)^3\right) \text{ est une base de } G \cap H.}$