Exercice 1 .

Déterminer la nature des séries numériques suivantes et, lorsque c'est possible, leur somme.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n}$ 3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)}$

1. $\forall N \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{N+1} - \sqrt{0}$

$$= \sqrt{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ diverge vers } +\infty.}$

2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n} \text{ converge vers } \frac{3}{2}}$

Remarque : On aurait aussi pu dire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique qui converge car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ et sa somme vaut $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

3. $\sum_{n=2}^{N} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln(n+1)\ln n}$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln n} - \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)\ln(n)}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N+1)} \longrightarrow \frac{1}{\ln 2}$$

$\boxed{\text{Donc la série converge et sa somme vaut } \frac{1}{\ln 2}}$

Exercice 2 .

Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, déterminer leur somme :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n2^n$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{3^n}$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\sqrt{n}$
5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n\, n!}$
7. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{(n-1)}{2^n}$
8. $\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}$

1. $e^{-n} = (e^{-1})^n$ Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$ une série géométrique convergente

car $|e^{-1}| = \left|\frac{1}{e}\right| < 1$.

$$\boxed{\sum_{n\geq n_0} x^k \text{ CVG ssi } \underbrace{|x|<1}_{-1<x<1}}$$

Sa somme vaut : $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$.

D'où :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}}$$

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n2^n$

$n2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n2^n$ diverge grossièrement.

$$3 \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{3^n} \longleftarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1)\, x^{n-2}$$

série géom dérivée seconde

CVG ssi $|x|<1$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{N} n(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\, x^{n-2}$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ est une "série géométrique dérivée seconde" convergente car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Et $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} \qquad \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{4}$$

Donc $$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{3}{4}.$$

Donc $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{3^n} \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} = \frac{3}{4}}$$

$\boxed{\text{NB :}}$ $u_n \longrightarrow 0 \iff |u_n| \longrightarrow 0$

4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \sqrt{n}$

$|(-1)^n \sqrt{n}| = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ Donc $\left((-1)^n \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \sqrt{n}$ diverge grossièrement.

5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n!}$ Ressemble à $\sum \frac{x^n}{n!}$) série expo) convergente.

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{n!} - 1$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle, donc elle converge

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$. Donc $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1}$

6. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n\, n!}$ Ressemble à $\sum \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{1}{2^n n!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n n!}$ est donc une serie exponentielle, donc elle

converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2} = \sqrt{e}}$

7. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)}{2^n}$

On va se ramener à $\sum n x^{n-1}$

$\sum x^n \quad \sum n x^{n-1} \quad \sum n(n-1) x^{n-2} \quad \sum \frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)}{2^n} = \frac{(-1)^{-1} \times (-1)}{2^0} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)}{2^n}$$

On pose $m = n-1$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \times \frac{m}{2^{m+1}}$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{N-1} (-1)(-1)^{m-1} \times \frac{m}{2^2 \times 2^{m-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{N-1} m \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{m-1}$$

Or $\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} m \left(\frac{-1}{2}\right)^{m-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$ (somme d'une série géométrique dérivée convergente $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$)

$$= \frac{4}{9}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{2^n}$ converge

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

8. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} = \overset{n=n-2}{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!}} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = e}$

Exercice 4.

1. Notons $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ (car $1+n^2 \sim n^2$)

- $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec "α" $= 2 > 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+n^2} \text{ converge.}}$

2. Notons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$.

$n+1 \sim n$

$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$

$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$

- $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n} \geq 0$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec "α" $= 1 \leq 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \text{ diverge}}$

3. Notons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq 0$ car $\frac{\pi}{2n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sim \frac{\pi}{2n}$

donc $u_n \sim \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^{3/2}}$.

- $u_n \geq 0$ et $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge
(C'est une série de Riemann avec "α" $= \frac{3}{2} > 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \text{ converge}}$

4. $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

donc $2n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim 2n \times \frac{1}{n} = 2$

Donc $2n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ne tend pas vers 0.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement.

$$u_n = \frac{n \ln n}{e^n} = o\left(\frac{n \times n}{e^n}\right) \text{ or } \frac{n^2}{e^n} \longrightarrow 0$$

Donc $u_n \longrightarrow 0$

5. Notons $u_n = n \ln(n) e^{-n}$

méthode de la comparaison à $\frac{1}{n^2}$.

$$n^2 u_n = \underbrace{n^3 \ln(n) e^{-n} = o(n^4 e^{-n})}_{v_n = o(w_n) \implies v_n t_n = o(w_n t_n)} \quad \text{car } \ln(n) = o(n)$$

Or $n^4 e^{-n} \longrightarrow 0$ donc $n^2 u_n \longrightarrow 0$

D'où $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

- $u_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec "α" $= 2 > 1$)

Donc, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \ln(n) e^{-n} \text{ converge}}$$

6. Notons $u_n = \dfrac{1}{n(n+\ln(n))}$.

$\ln(n) = o(n)$ donc $n + \ln(n) \sim n$

donc $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$

- $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec "α" $= 2 > 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$$

7. On pose $u_n = e^{1/n} - 1$.

$\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

- $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec "α" $= 1 \leqslant 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge}}$$

8. Posons $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$

$$n^2 u_n = \frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{donc} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

- $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec "α" $= 2 > 1$)

Donc, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$$

9. Notons $u_n = \left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)^n$

$\ln(3n) \geq \ln 3$.

$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{\ln(3n)} \leq \frac{1}{\ln 3}$ donc $\left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)^n \leq \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n$.

- $u_n \geq 0$ et $\left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n \geq 0$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n$ converge (série géométrique et $\left|\frac{1}{\ln 3}\right| < 1$)

Donc, par le critère de majoration des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$$

Exercice 5 . Pour s'entrainer
Déterminer la nature des séries suivant

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)$

1. Notons $u_n = \sin\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)$

$\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

donc $u_n \sim \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \sim -\frac{1}{2^n}$ car $\frac{1}{3^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$

donc $-u_n \sim \frac{1}{2^n}$

- $\frac{1}{2^n} \geqslant 0$ donc $-u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} -u_n$ converge

Donc, par multiplication par $-1 \neq 0$, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}}$

donc $|u_n| \sim \left|-\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$.

- $\frac{1}{2^n} \geqslant 0$ et $|u_n| \geqslant 0$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge

Donc $\sum u_n$ est abs. convergente donc elle converge.

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{2^n}$

2. Notons $u_n = \frac{\cos n}{2^n}$

$$|u_n| = \frac{|\cos n|}{|2^n|} = \frac{|\cos n|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

- $|u_n| \geqslant 0$; $\frac{1}{2^n} \geqslant 0$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$).

Donc, par le critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge absolument donc elle converge.}}$$

3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{3n^3 - 4n + 1}$

Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{3n^3 - 4n + 1}$

$$|u_n| = \frac{1}{3n^3 - 4n + 1} \sim \frac{1}{3n^3}$$

- $|u_n| \geqslant 0$ et $\frac{1}{3n^3} \geqslant 0$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann et $3>1$).

  donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^3}$ converge (multiplication par un scalaire).

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ est absolument convergente, donc convergente.}}$$

4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$

Notons $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$. $u_n < 0$ car $1-\frac{1}{\sqrt{n+2}} < 1$.

$\frac{-1}{\sqrt{n+2}} \longrightarrow 0$ donc $u_n \sim \frac{-1}{\sqrt{n+2}} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}}$

Donc $-u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

- $-u_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\frac{1}{2} \leqslant 1$).

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -u_n$ diverge

Donc, par multiplication par $-1 \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge

Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge}}$

5. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\underbrace{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}\right)$ $\ln(v_n)$ avec $v_n \to 1$ $\ln(1+\underbrace{v_n-1}_{\to 0}) \sim v_n - 1$

Posons $u_n = \ln\left(\underbrace{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)-1}_{h_n}\right) = \ln(1+h_n)$.

tend vers 1
donc s'écrit
$1 + h_n$ avec $h_n \to 0$

$h_n \to 0$ donc $\ln(1+h_n) \sim h_n$

Donc $u_n \sim \cos\left(\frac{1}{2n}\right) - 1 \sim -\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}{2} = -\frac{1}{8n^2}$.

Donc $-u_n \sim \frac{1}{8n^2}$

- $u_n \leqslant 0$ car $\cos\left(\frac{1}{2n}\right) \leqslant 1$ donc $-u_n \geqslant 0$

et $\frac{1}{8n^2} \geqslant 0$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$)

donc, par multiplication par $\frac{1}{8} \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{8n^2}$ converge

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -u_n$ converge.

Donc, par multiplication par $-1 \neq 0$: $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$

6. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Pour montrer que $u_n \to 0$

On peut montrer que $|u_n| \to 0$

$u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$

Posons $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{(-1)^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^2}$

d'où $|u_n| \sim \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

- $|u_n| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge.

$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ est donc absolument convergente, donc elle converge}}$

Exercice 7

1. $$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}=\frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2(a+b+c)+n(3a+2b+c)+2a}{n(n+1)(n+2)}$$

On veut avoir $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=-1 & (L_1 \leftarrow L_2-L_1) \\ c=\frac{1}{2} & (L_2 \leftarrow 2L_1-L_2) \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}}$

Exercice 8 .

Soit $a \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que (u_n) décroit vers 0.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
4. En déduire que la série de terme général $\sum u_n$ diverge .

Exercice 8

$u_n^2 \geq 0$ donc $-u_n^2 \leq 0$

1. $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 = a < 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

I $(n=0)$.

$u_0 = a \in]0,1[$ donc la propriété est vraie au rang 0.

H Soit $n \geq 0$. On suppose $u_n \geq 0$. Montrons que $u_{n+1} \geq 0$

$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n)$

Or $0 \leq u_n < 1$ donc $1 - u_n \geq 0$

H.R. déjà prouvé

donc $u_n(1-u_n) \geq 0$

D'où $\iff u_{n+1} \geq 0$

$0 \leq u_n < 1$

Donc $u_n^2 \leq u_n$

Donc $u_n - u_n^2 \geq 0$

$\iff u_{n+1} \geq 0$.

C Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0}$

- (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite ℓ.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

et $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et $u_n - u_n^2 \longrightarrow \ell - \ell^2$

Donc $\ell = \ell - \ell^2$ donc $\ell^2 = 0$ donc $\ell = 0$

Donc $\boxed{u_n \longrightarrow 0}$

2. $\forall N \geq 0, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = \sum_{n=0}^{N} u_n - u_{n+1}$

télescopage

$$= u_0 - u_{N+1}$$

$$= a - u_{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} a$$

car $u_{N+1} \longrightarrow 0$.

Donc $\sum u_n^2$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = a$.

3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

À Retenir !

3. $\forall N \geq 0, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=0}^{N} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$$= \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0)$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} -\infty \quad \text{car } u_{N+1} \longrightarrow 0.$$

Donc $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge (vers $-\infty$).

4. En déduire que la série de terme général $\sum u_n$ diverge .

$$\frac{u_n}{u_n} - \frac{u_n^2}{u_n}$$

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \rightsquigarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n}$$

4. $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \quad \left(u_{n+1} = u_n - u_n^2 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n \right)$

$\sim -u_n$ car $u_n \longrightarrow 0$

Donc $u_n \sim -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

- $u_n \geqslant 0$ et $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant 0$
- $\sum -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge car $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

Modalité $\sum u_n^2$ CVG $\sum u_n$ div

$u_n \geq 0$ $\sum u_n^2$ CVG $\Longrightarrow u_n^2 \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ apcr $u_n^2 \in]0,1[$.

$\Longrightarrow$ apcr $u_n^2 < u_n$

Soit (u_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant 0$

$$\sum u_n \text{ CVG} \Longrightarrow \sum u_n^2 \text{ CVG}$$

Preuve :

$\sum u_n$ CVG $\Rightarrow$ $u_n \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geqslant n_0$ $u_n \in [0,1[$.

Donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n^2 \leqslant u_n$.

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs.

$\sum u_n^2$ CVG.

$\sum 1/n$ DiV. et $\sum 1/n^2$ CVG.

Exercice 9

IMPORTANT

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$

1. $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ (voir $*$)

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0.$$

Donc $(S_{2n}) \searrow$.

2. $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$

$$= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Donc $(S_{2n+1}) \nearrow$.

3. $\left|S_{2n+1} - S_{2n}\right| = \left|\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$

- $(S_{2n}) \nearrow$ et $(S_{2n+1}) \searrow$
- $\left|S_{2n+1} - S_{2n}\right| \longrightarrow 0$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Donc elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } \ell.}$

NB :

$$\cdot \text{ Si } \begin{cases} u_{2n} \to \ell \\ \text{et} \\ u_{2n+1} \to \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad u_n \to \ell.$$

$u_0\ u_1, u_2\ u_3\ --\ u_n \cdot -$

$u_0 ; u_2 ; u_4 ; u_6 ; \cdots ; u_{2n} \quad \leftarrow \quad (u_{2n})_{n \geq 0}$

$u_1 ; u_3 ; u_5 ; u_7 ; \cdots ; u_{2n+1} \quad \leftarrow \quad (u_{2n+1})_{n \geq 0}$

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$

__Rem:__ $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$

$$(*) \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k$$

$$\| $$

$$\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cdots + \cancel{u_{2n}} + \boxed{u_{2n+1} + u_{2n+2}}$$

$$-(\cancel{u_1} + \cdots + \cancel{u_{2n}})$$