Feuille d'exercices n°20 - Espaces probabilisés infinis

Exercice 1 . Vocabulaire 1

1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Déterminer $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$

2. Même question avec $A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$

Exercice 2 . Vocabulaire 2

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements et $n \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire, à l'aide des opérations ensemblistes ∪ et ∩ les évènements suivants :

1. L'un des évènements $A_1, \dots, A_n$ se réalise.
2. L'un des évènements A_i se réalise.
3. Aucun des évènements A_i ne se réalise.
4. A_1 et A_1 seul se réalise.
5. A_1 et A_2 et eux seuls se réalisent.
6. $(***)$ Un et un seul des A_i se réalise.
7. $(***)$ A partir d'un certain rang, tous les A_i se réalisent.
8. $(***)$ Une infinité d'A_i se réalise.
9. $(***)$ Un nombre fin de A_i se réalise.

Exercice 3 . Vocabulaire 3

On tire successivement et avec remis des boules dans une urne contenant 1 rouges et 9 blanches. On note R_n l'évènement « la n −ième boule tirée et rouge ». Traduire en langage courant les évènements suivants

$$\bigcup_{k=1}^{n} R_k \ ; \ \bigcap_{k=1}^{n} R_k \ ; \ \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \ ; \ \bigcup_{k=10}^{+\infty} \overline{R_k} \ ; \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k \ ; \ \bigcap_{k=5}^{+\infty} \overline{R_k} \ ; \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{i=k}^{+\infty} R_k \ ; \bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{i=k}^{+\infty} R_k$$

Exercice 4 . Réunion disjointe

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de dés. On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce qu'une somme égale à 5 ou 7 apparaisse. Le joueur A gagne si la somme 5 apparaît et le joueur B gagne si c'est la somme 7 qui apparaît.
On note A_n l'évènement « le joueur A gagne au n-ième tour » et B_n l'évènement « le joueur B gagne au n-ième tour ». On pose $G_n = A_n \cup B_n$.
On note A (resp. B) l'évènement « le joueur A (resp. B) gagne ».

1. Déterminer $P(A_n)$ pour tout entier naturel n non nul.
2. En déduire $P(A)$.
3. Déterminer $P(B)$
4. Le jeu s'arrête-t-il presque surement ?

Exercice 5 . Limite monotone - 1

Une urne contient initialement 1 boule rouge et une boule blanche. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On répète cette opération à l'infini.
On note, pour $n \geq 1$ quelconque :

- R_n l'évènement « la n-ième boule tirée et rouge »
- A_n l'évènement « On ne tire aucune boule rouge au cours des n premiers tirages. »
- B l'évènement « On tire au moins une boule rouge lors de la suite infinie de tirages »

1. Déterminer, pour $n \geq 1$, $P(A_n)$
2. En déduire $P(B)$

Exercice 6 . Limite monotone - 2

Une urne contient initialement 1 boule rouge et une boule blanche. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec **deux** boules de la même couleur. On répète cette opération à l'infini.
On note, pour $n \geq 1$ quelconque :

- R_n l'évènement « la n-ième boule tirée et rouge »
- A_n l'évènement « On ne tire aucune boule rouge au cours des n premiers tirages. »
- B l'évènement « On tire au moins une boule rouge lors de la suite infinie de tirages »

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

2. Justifier que la suite $\left(\ln\left(P(A_n)\right)\right)_{n\geq 1}$ diverge vers $-\infty$.
3. En déduire $P(B)$.

Exercice 7 . Limite monotone – 3

Un joueur dispose de 2 euros et joue au jeu suivant : il lance une pièce de monnaie équilibrée et perd 1 € s'il obtient Pile et gagne un bonbon s'il obtient Face. Il recommence ainsi indéfiniment jusqu'à avoir perdu ses 2 €.
Pour modéliser cette expérience, on considèrera qu'il répète en fait indéfiniment cette expérience mais que lorsqu'il n'a plus d'argent, à chaque lancer il ne perd plus d'argent ni ne gagne de bonbon.
Pour tout entier $k \geq 1$, on note :

- X_k la variable aléatoire donnant le nombre de Piles obtenus lors de k premiers lancers.
- A_k l'évènement « le joueur a encore 2 Euros à l'issue du k-ième lancer ».
- B_k l'évènement « le joueur a encore exactement 1 Euros à l'issue du k-ième lancer ».
- R_k l'évènement « le joueur a 0 euros (et est donc ruiné) à l'issue du k-ième lancer ».
- R l'évènement « le joueur finit ruiné » autrement dit « le jeu finit par s'arrêter ».

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k. On précisera la valeur de $P(X_k = i)$ pour $i \in X_k(\Omega)$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer $P(A_k)$.

b. Déterminer $P(B_k)$.

c. En déduire $P(R_k)$.

3. En déduire que le joueur finira presque surement ruiné.

Exercice 8 .

Un joueur joue au jeu suivant à l'aide d'une pièce equilibrée.

- A la première étape, il lance une fois la pièce. Si elle tombe sur Pile, il a gagné, sinon il passe à la seconde étape.
- A la seconde étape, il lance deux fois la pièce. S'il obtient deux Pile, il a gagné, sinon il passe à l'étape suivante.
- Il recommence ainsi de suite, à l'infini : A la k-ième étape, il lance k fois la pièce. Si elle tombe k fois sur Pile, il a gagné. Sinon il passe à l'étape suivante.

On note A_n l'évènement « le joueur n'a toujours pas gagné à l'issue de la n-ième étape ».

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

2. Justifier que la suite $\left(\ln\left(P(A_n)\right)\right)_{n\geq 1}$ tend vers une limite finie a.

3. En déduire que le joueur a une probabilité non nulle de ne jamais gagner.

Exercice 9 .

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est p $(0 < p < 1)$.

1. Pour $n \geqslant 2$, soit B_n l'évènement «La séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant». Calculer $\mathrm{P}(B_n)$.
   Soit B l'événement «La séquence PP apparaît au moins une fois sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant la première apparition». Calculer $\mathrm{P}(B)$.
2. Pour $n \geqslant 2$, soit A_n l'événement «La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n».
   Calculer $\mathrm{P}(A_n)$. On pourra poser $q = 1-p$.
   En déduire la probabilité de l'événement C : «La séquence PF n'apparaît jamais».

Exercice 10 .

On considère une infinité d'urnes numérotées. La probabilité de choisir l'urne numéro n (avec $n \geq 1$) est égale à $\frac{1}{2^n}$ et l'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?