FE21 - Variables Aléatoires Discrètes

Exercice 1: *révisions ...*

On considère deux urnes : l'urne 1 contient deux boules noires et deux boules blanches, et l'urne 2 contient 3 boules noires et 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on extrait successivement et sans remise 3 boules. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Loi de Y ?

Exercice 2 .

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = a \times 3^{-k}$.

1. Déterminer a.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Calculer la probabilité de que X soit égale à un multiple de 3.
4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
5. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
6. En déduire que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3 .

Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives n°1, 2, … , n, …

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur n° n est égale à $\frac{1}{n}$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. X prend la valeur 0 si le sauteur réussi indéfiniment tous les sauts.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

Interpréter ce résultat.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. (****) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 4:

Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$.
   c) Montrer que X admet une variance et la calculer.
2. a) Déterminer $Y(\Omega)$, puis pour tout $k \geq 2$, calculer $P(Y = k)$.
   b) En déduire la loi de Y.

Exercice 5:

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable égale au numéro du tirage final, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Donner sans calcul $X(\Omega)$, puis déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n)$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$. En déduire $P(X = 0)$. Conclusion ?

Exercice 6:

On lance de manière indépendante une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, jusqu'à l'obtention du premier pile. On note X le nombre de lancers nécessaires et Y le nombre de "face" obtenus.

1. Reconnaître la loi de X, et rappeler son espérance et sa variance.
2. Exprimer Y en fonction de X. En déduire son espérance et sa variance, puis sa loi.

Exercice 7:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$. On pose $Y = \frac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 8:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = (1-p)^k$.

Montrer alors la propriété d'absence de mémoire : $\forall (k, l) \in \mathbb{N}$, $P_{(X>l)}(X > k + l) = P(X > k)$.

Exercice 9:

Deux joueurs A et B lancent une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $1/3$ jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X_A (resp. X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B).

a) Donner la loi de X_A et de X_B ainsi que leur espérance et leur variance.

b) Calculer $P(X_A = X_B)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$. En déduire $P(X_B \geqslant X_A)$.

Exercice 10:

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4P(X = n+2) = 5P(X = n+1) - P(X = n)$. Montrer que X suit une loi usuelle.
En déduire la valeur de son espérance et de sa variance.

Exercice 11:

Soit un réel $p \in]0, 1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F(n) = 1 - (1-p)^n$. Donner la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 12:

Une princesse est retenue prisonnière dans un chateau. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard. Si il ouvre la première porte, un dragon apparait et le dévore. Si il ouvre la deuxième, il délivre la princesse. Si il ouvre la troisième, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie ce qu'il a fait et est remis à la porte du chateau. Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement D_k "il délivre la princesse au k-ème essai".
2. Calculer la probabilité de l'événement D "il délivre la princesse".
3. On note T le nombre de tentatives du prince. Donner la loi de T ainsi que son espérance.

Exercice 13: ***Loi binomiale négative***

On effectue une infinité de lancers de dé indépendants et on appelle "succès" l'obtention d'un "6".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le temps d'attente du n^{ie} succès, c'est-à-dire le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du n^{ie} succès.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ puis décrire $(X_n = n)$ et $(X_n = n+1)$. Que vaut $P(X_n = n)$ et $P(X_n = n+1)$?
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrire $(X_n = n+k)$, en précisant le nombre d'issues. En déduire la loi de X_n.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ converge et que sa somme vaut 5^n.

Exercice 14: ** *Plus théorique*

Soit X une variable aléatoire discrète vérifiant :$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq nP(X > n) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$. En déduire la limite de $nP(X > n)$.
   (b) Déduire du 1. que la série de terme général $P(X > k)$ converge et que sa somme vaut $E(X)$.
3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P(X > n)$ converge.
   (a) En étudiant la suite des sommes partielles, montrer que X admet une espérance.
   (b) En déduire l'égalité des sommes : $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Exercice 15:

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$ en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet $n°1$?
3. Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Et pour $k > n$?
4. Déterminer $X_1(\Omega)$ puis justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n)$
5. Calculer alors cette somme pour en déduire la loi de X_1, puis son espérance et sa variance.

Exercice 16: `eml 94`

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0.2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
3. En suivant une méthode similaire, déterminer la loi de Y.

Exercice 17: *Un exercice clé de la feuille précédente .....*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé : on jette n fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la var égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n + 1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.