Exercice 12 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Calculer $u_{n+2} + u_n$.
4. Montrer que, en utilisant les deux questions précédentes, que pour $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$
5. En déduire un équivalent de u_n.
6. Déterminer, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^\alpha}$.

1. $$u_0 = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^0 \,dt = \int_0^{\pi/4} 1 \,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan t \,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} \,dt$$

$\frac{u'}{u}$

$$= -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin t}{\cos t} \,dt$$

$$= -\Big[\ln|\cos t|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= -\left(\ln|\cos \pi/4| - \ln|\cos 0|\right)$$

$$= -\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right)$$

$$= -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -(\ln\sqrt{2} - \ln 2)$$

$$= -\ln\sqrt{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2$$

$$= \frac{\ln 2}{2}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^{n+1} dt - \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan t)^{n+1} - (\tan t)^n dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan t - 1)\, dt$$

Pour tout $t \in [0, \pi/4]$:

$\tan 0 \leqslant \tan t \leqslant \tan \pi/4$

$\iff \quad 0 \leqslant \tan t \leqslant 1$

Donc $(\tan t)^n \geqslant 0$ et $\tan t - 1 \leqslant 0$

D'où $(\tan t)^n (\tan t - 1) \leqslant 0$

En intégrant sur $[0, \pi/4]$:

$$\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan t - 1)\, dt \leqslant 0$$

Donc $(u_n) \searrow$

Autre méthode :

Pour tout $t \in [0, \pi/4]$, $\tan t \in [0, 1]$

Donc $(\tan t)^{n+1} \leqslant (\tan t)^n$

Donc, en intégrant sur $[0, 1]$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. $u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^{n+2} + (\tan t)^n \, dt$ par linéarité.

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\tan t)^n}_{u^n} \underbrace{(\tan^2 t + 1)}_{\times \; u'} \, dt.$$

$$= \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{(\tan \pi/4)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\tan 0)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}}$$

4. (u_n) est $\searrow$ donc, pour $n \geqslant 2$:

$$u_{n+2} \leqslant u_n \leqslant u_{n-2} \qquad + u_n$$

$$\iff u_n + u_{n+2} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-2} + u_n$$

Or $u_n + u_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{n-2} + u_n = \dfrac{1}{n-1}$.

Donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

$$\iff \boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}}$$

5. Idée :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

$$\sim \frac{1}{2n} \qquad \sim \frac{1}{2n}$$

ON NE PEUT PAS REDIGER COMME ÇA

Donc $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

$$\frac{u_n}{\frac{1}{2n}} \longrightarrow 1.$$

On a, pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2n}{2(n+1)} \leq 2n\, u_n \leq \frac{2n}{2(n-1)}$$

Or $\frac{2n}{2(n+1)} \longrightarrow 1$ et $\frac{2n}{2(n-1)} \longrightarrow 1$

Donc, par encadrement :

$$2n u_n \longrightarrow 1$$

$$\iff \frac{u_n}{\frac{1}{2n}} \longrightarrow 1$$

Donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$

6. $u_n \sim \frac{1}{2n}$ donc $\frac{u_n}{n^\alpha} \sim \frac{\frac{1}{2n}}{n^\alpha}$

$$\iff \frac{u_n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n \times n^\alpha}$$

$$\iff \frac{u_n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{\alpha+1}} .$$

- $\frac{u_n}{n^\alpha} \geqslant 0$ et $\frac{1}{2n^{\alpha+1}} \geqslant 0$

Donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs,

$\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n^{\alpha+1}}$ sont de même nature.

Or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n^{\alpha+1}}$ est de même nature que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est une série de Riemann qui

converge si et seulement si $\alpha+1 > 1$.

$\iff \alpha > 0$

Donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 0}$

Exercice 13 . Série géométrique primitivée

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 0[, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1[$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1[$

On remarque que : $\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k\,dt$.

En effet : $\int_0^x t^k\,dt \underset{\text{car } k \neq -1}{=} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{0^{k+1}}{k+1}$

car $k \neq -1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^x t^k\,dt\right) \underset{\text{linéarité.}}{=} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt$$

linéarité.

$$\underbrace{\int_0^x t^0\,dt}_{k=0} + \underbrace{\int_0^x t^1\,dt}_{k=1} + \dots + \int_0^x t^{n-1}\,dt.$$

On, si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Si $t \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$

Donc $\displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= -\int_0^x \underbrace{\frac{-1}{1-t}}_{\frac{u'}{u}}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= \Big[\ln|1-t|\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= \ln|1-x| - \ln|1| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

$$= \ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Exercice 13 . Série géométrique primitivée

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [-1,0[, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-1,1[$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.

2 a. Soit $\boxed{x \in [0,1[}$

IT : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{t^n}{1-t}\right| dt$$

$$\leqslant \int_0^x \frac{|t^n|}{|1-t|}\,dt.$$

$t^n \geqslant 0$

$1-t \geqslant 0$

$$\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

Pour tout $t \in [0,x]$ (rappel : $x \in [0,1[$)

$$t \leqslant x$$

donc $\quad 1-t \geqslant 1-x > 0 \quad$ (car $x \in]0,1[$)

donc $\quad \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$$

Donc, en intégrant sur $[0,x]$:

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

D'où $\displaystyle \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}$.

b) Soit $x \in [1,0]$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| &= \left| -\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| \\
&= \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| \\
&\leqslant \int_x^0 \left| \frac{t^n}{1-t} \right| dt
\end{aligned}$$

I.T. (car $x \leqslant 0$).

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_x^0 \frac{|t^n|}{|1-t|}\,dt \\
&\leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,dt \\
&\leqslant \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1-t}\,dt
\end{aligned}$$

$1-t > 0$

Or, pour tout $t \in [x, 0]$,

$$1 - t > 1 \quad (\text{car } t < 0)$$

Donc $\dfrac{1}{1-t} < 1$

D'où $\dfrac{(-t)^n}{1-t} \leqslant (-t)^n$

D'où, en intégrant sur $[x, 0]$:

$$\int_x^0 \frac{(-t)^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_x^0 (-t)^n\,dt = -\int_x^0 \underbrace{-(-t)^n}_{u'\,u^n}\,dt$$

$$= -\left[\frac{(-t)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0$$

$$= -\left(0 - \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

D'où $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 13 . Série géométrique primitivée

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1[$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt.}$$

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \qquad \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 0[, \qquad \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1[$, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.

Soit $x \in [-1, 1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{\substack{k'=k-1 \\ k=k'+1}}{=} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{x^{k'+1}}{k'+1}$$

$$\underset{\text{question 1}}{=} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt.$$

On $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>En effet</u> :

q^{n+1} avec $|q|<1$

Si $x \in]0, 1[$, $\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$x^{n+1} \to 0$, $(n+1) \to +\infty$

Si $x \in [-1, 0]$, $\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

Donc dans les 2 cas, $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par encadrement.

$$\left(|u_n| \leq v_n \text{ et } v_n \longrightarrow 0 \implies u_n \longrightarrow 0 . \right)$$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$.