Exercice 1 . Vocabulaire 1

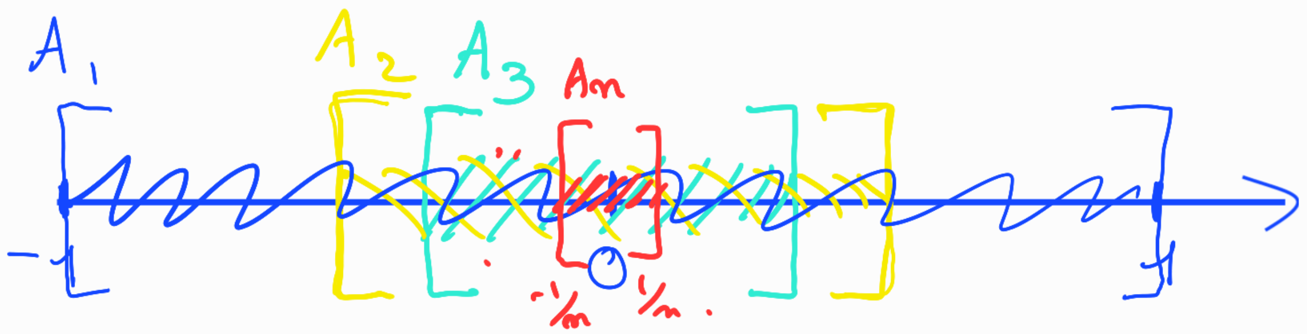
1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Déterminer $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$

2. Même question avec $A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$

1. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

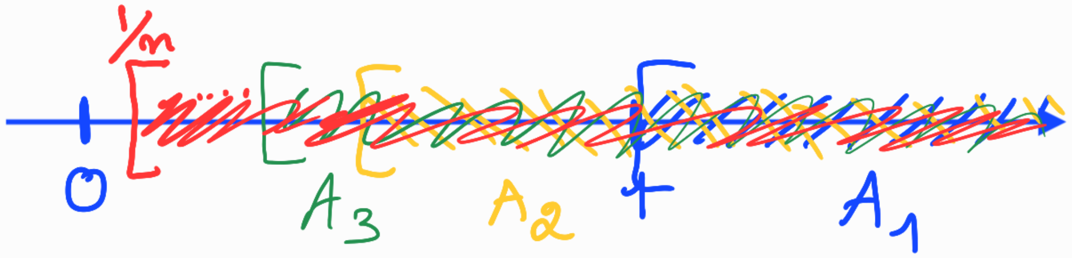
$= [-1, 1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \cdots \cup \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$



$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = [-1, 1]$; $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = [-1, 1]$

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$; $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = \{0\}$

2.



$$A_1 = [1, +\infty[$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = [1, +\infty[$$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k =]0, +\infty[$$

(car $\forall x \in]0, +\infty[$. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, tq $x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = [1, +\infty[$$

Exercice 2 . Vocabulaire 2

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements et $n \in \mathbb{N}^*$.

Ecrire, à l'aide des opérations ensemblistes ∪ et ∩ les évènements suivants :

1. L'un des évènements $A_1, \dots, A_n$ se réalise.
2. L'un des évènements A_i se réalise.
3. Aucun des évènements A_i ne se réalise.
4. ** A_1 et A_1 seul se réalise.
5. *** A_1 et A_2 et eux seuls se réalisent.
6. (∗∗∗) Un et un seul des A_i se réalise.
7. (∗∗∗) A partir d'un certain rang, tous les A_i se réalisent.
8. (∗∗∗) Une infinité d'A_i se réalise.
9. (∗∗∗) Un nombre fin de A_i se réalise.

1. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$

2. $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$

3. $\overline{\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i} \underset{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}{=} \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i}$

("aucun des A_i ne se réalise" = "Tous les $\overline{A_i}$ se réalisent".)

4. $A_1 \cap \left(\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{+\infty} \overline{A_i}\right) = $ " $A_1 \cap (\overline{A_0} \cap \overline{A_2} \cap \cdots)$ "

5. $A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq 1\\ i\neq 2}}^{+\infty} \overline{A_i}\right) = $ " $\underline{\underline{A_1 \cap A_2 \cap (\overline{A_0} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \dots)}}$ "

6. "A_i seul se réalise" $= A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$

"$\exists i \in \mathbb{N}$, A_i seul se réalise" $= \bigcup_{i=0}^{+\infty} \left(A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{+\infty} A_j\right)\right)$

7. "À partir d'un certain rang k tous les A_i se réalisent"

$$= \text{“}\exists k \in \mathbb{N},\ \forall i \geq k,\ A_i \text{ se réalise”}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} A_i \right) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{+\infty} A_i$$

$$= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{i \geq k} A_i$$

$$= \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{i \geq k} A_i .$$

8. $$\underbrace{\bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{i \geq k} A_i}_{\text{“}\forall k \geq 0,\ \exists i \geq k,\ A_i \text{ se réalise”}}$$

9. $$\overline{\bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{i \geq k} A_i} = \underbrace{\bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{i \geq k} \overline{A_i}}_{\text{“}\exists k \geq 0,\ \forall i \geq k,\ \overline{A_i}\text{”}}.$$

Exercice 3 . Vocabulaire 3

On tire successivement et avec remis des boules dans une urne contenant 1 rouges et 9 blanches. On note R_n l'évènement « la n −ième boule tirée ~~et~~ est rouge ». Traduire en langage courant les évènements suivants

$$\bigcup_{k=1}^{n} R_k \;;\; \bigcap_{k=1}^{n} R_k \;;\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \;;\; \bigcup_{k=10}^{+\infty} \overline{R_k} \;;\; \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k \;;\; \bigcap_{k=5}^{+\infty} \overline{R_k} \;;\; \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{i=k}^{+\infty} R_k \;;\; \bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{i=k}^{+\infty} R_k$$

- $\bigcup_{k=1}^{n} R_k$ = " Un des R_k se réalise pour $k \in [\![1,n]\!]$ "
  = " On tire au $\ominus$ une boule rouge lors des n 1ers tirages ".

- $\bigcap_{k=1}^{n} R_k = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n$
  = " les n 1ers boules tirées sont rouges ".

- $\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k$ = " Un des R_k se réalise "
  = " On tire au $\ominus$ une boule rouge ".

- $\bigcup_{k=10}^{+\infty} \overline{R_k}$ = " À partir du 10ème tirage, on tire au $\ominus$ une boule blanche ".

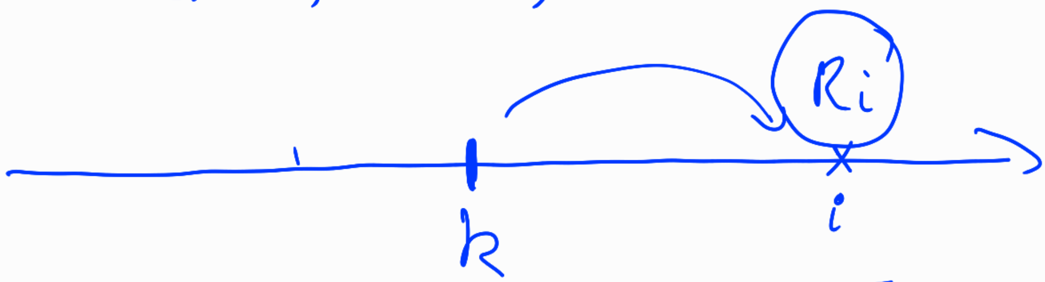
- $\bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k$ = " Toutes les boules tirées sont rouges ".

- $\bigcap_{k=5}^{+\infty} \overline{R_k}$ = " À partir du 5ème tirage, toutes les boules tirées sont blanches ".

- $\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{i=k}^{+\infty} R_i$ = " Il existe un rang k à partir duquel toutes les boules tirées sont rouges "
  = " le nombre de boules blanches tirées est fini ".

- $\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{i=k}^{+\infty} R_i = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i\right)}_{k=1} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=2}^{+\infty} R_i\right)}_{k=2} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} R_i\right)}_{k=3} \cap \dots$

" $\forall k \in [\![1, +\infty[\![, \exists i \geq k, R_i$ se réalise "



" On tire une infinité de boules rouges "

$k=1 \longrightarrow \exists i_1 \geq 1, R_{i_1}$ se réalise.

$k = i_1+1 \longrightarrow \exists i_2 \geq i_1+1, R_{i_2}$ se réalise

$k = i_2+1 \longrightarrow \exists i_3 \geq i_2+1, R_{i_3}$ se réalise

Rem : " Tirer un nombre fini de boules rouges " :

$$\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{i \geq k} R_i} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{i \geq k} \overline{R_i}$$

Exercice 4 . Réunion disjointe

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de dés. On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce qu'une somme égale à 5 ou 7 apparaisse. Le joueur A gagne si la somme 5 apparaît et le joueur B gagne si c'est la somme 7 qui apparaît.
On note A_n l'évènement « le joueur A gagne au n-ième tour » et B_n l'évènement « le joueur B gagne au n-ième tour ». On pose $G_n = A_n \cup B_n$.
On note A (resp. B) l'évènement « le joueur A (resp. B) gagne ».

1. Déterminer $P(A_n)$ pour tout entier naturel n non nul.
2. En déduire $P(A)$.
3. Déterminer $P(B)$
4. Le jeu s'arrête-t-il presque surement ?

1. Remarque : Somme de 2 dés.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

36 "cases" équiprobables.

$$P(S=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(S=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(S=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\underline{S \notin \{5,7\}}) = 1 - \big(P(S=5) + P(S=7)\big) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{13}{18}.$$

1. $A_n = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}} \cap A_n$ ||| égalité des événements.

$$P(A_n) = P\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}} \cap A_n\right)$$

par indépendance des lancers.

$$= P(\overline{G_1}) \times P(\overline{G_2}) \times \cdots \times P(\overline{G_{n-1}}) \times P(A_n)$$

$$= \frac{13}{18} \times \frac{13}{18} \times \cdots \times \frac{13}{18} \times \frac{1}{9}$$

$$\boxed{P(A_n) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9}.}$$

2. $A =$ "le joueur A gagne" $=$ "l'un des A_n se réalise"

$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Donc $P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$

Les A_n sont 2 à 2 incompatibles

Donc $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ (cette somme existe car $\sum P(A_n)$ converge).

$$\sum_{n=1}^{N} P(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

$n' = n-1$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n'=0}^{N-1} \left(\frac{13}{18}\right)^{n'}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1-\left(\frac{13}{18}\right)^{N}}{1-\frac{13}{18}}$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{9} \times \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{5}}$$

3. $B_n = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}} \cap B_n$

$$P(B_n) = P\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}} \cap B_n\right)$$

$$= \frac{13}{18} \times \frac{13}{18} \times \cdots \times \frac{13}{18} \times \frac{1}{6}$$

$$= \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P(B_n) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}}$$

$$B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

Les B_n sont 2 à 2 incompatibles.

Donc $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$ (cette somme existe et est finie car $\sum P(B_n)$ converge)

$$\sum_{n=1}^{N} P(B_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

4. Le jeu s'arrête si l'un des 2 joueurs gagne

Donc on cherche $P(A \cup B)$

A et B sont incompatibles donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$= 1$$

Donc " $A \cup B$ est presque certain ".

Exercice 5 . Limite monotone - 1

Une urne contient initialement 1 boule rouge et une boule blanche. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On répète cette opération à l'infini.

On note, pour $n \geq 1$ quelconque :

- R_n l'évènement « la n-ième boule tirée et rouge »
- A_n l'évènement « On ne tire aucune boule rouge au cours des n premiers tirages. »
- B l'évènement « On tire au moins une boule rouge lors de la suite infinie de tirages »

1. Déterminer, pour $n \geq 1$, $P(A_n)$

2. En déduire $P(B)$

1. $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k} \quad \left(= \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_n} \right)$

$$P(A_n) = P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_n}\right)$$

$$= P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(\overline{R_3}) \times \cdots \times P_{\overline{R_1} \cap \cdots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{n+1}}$$

2. $\overline{B} =$ " Ne pas tirer de boule rouge "

$$\overline{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Si A_{n+1} se réalise alors A_n aussi, donc la suite d'évènements (A_n) est décroissante.

Donc, par le TCM,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim \frac{1}{n+1} = 0 .$$

$$\boxed{P(\overline{B}) = 0 \quad \text{donc} \quad P(B) = 1}$$

Exercice 6 . Limite monotone - 2

Une urne contient initialement 1 boule rouge et une boule blanche. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec **deux** boules de la même couleur. On répète cette opération à l'infini.

On note, pour $n \geq 1$ quelconque :

- R_n l'évènement « la n-ième boule tirée et rouge »
- A_n l'évènement « On ne tire aucune boule rouge au cours des n premiers tirages. »
- B l'évènement « On tire au moins une boule rouge lors de la suite infinie de tirages »

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

2. Justifier que la suite $\left(\ln(P(A_n))\right)_{n\geq 1}$ diverge vers $-\infty$.

3. En déduire $P(B)$.

1. $A_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_n} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}$

$$P(A_n) = P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_n}\right)$$

$$= P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(\overline{R_3}) \times \cdots \times P_{\overline{R_1} \cap \cdots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})$$

$$= \underset{2\times 1}{\frac{1}{2}} \times \underset{2\times 2}{\frac{3}{4}} \times \underset{2\times 3}{\frac{5}{6}} \times \cdots \times \underset{2n}{\frac{2n-1}{2n}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

Donc $P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$

2. On doit prouver que $\ln\big(P(A_n)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

$$\ln\big(P(A_n)\big) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{4}\right)+\dots+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\overset{*}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$$

$$* \quad \boxed{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_n)}$$

Etudions la nature de : $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)}_{u_n}$.

$u_n \sim -\dfrac{1}{2k}$ car $-\dfrac{1}{2k} \longrightarrow 0$

$-u_n \sim \dfrac{1}{2k}$

- $-u_n \geq 0$ $\left(\text{car } u_n \leq 0 \text{ car } 1-\dfrac{1}{2k} \leq 1\right)$ et $\dfrac{1}{2k} \geq 0$.
- $\sum \dfrac{1}{2k}$ diverge car $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge

(série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$)

Donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\sum_{k \geqslant 1} -u_k \text{ diverge } \underline{\underline{\text{vers } +\infty}}$$

car $\sum -u_k$ est à termes positifs.

D'où $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ diverge vers $-\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = -\infty.$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} \ln\left(P(A_n)\right) = -\infty}$$

3. $P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

Si A_{n+1} se réalise alors A_n aussi.
$\left(A_{n+1} \subset A_n\right)$
La suite d'évènements (A_n) est $\searrow$.
Donc par le TLM :

$$P(\overline{B}) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

Or $P(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } P(A_n) > 0}}{=} e^{\ln(P(A_n))}$ $\qquad \left(x = e^{\ln x} \text{ si } x > 0\right)$

Or $\ln(P(A_n)) \longrightarrow -\infty$

Donc $e^{\ln(P(A_n))} \longrightarrow 0$ $\qquad \left(e^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0\right)$

D'où $P(A_n) \longrightarrow 0$.

D'où $P(\overline{B}) = 0$ et donc $\boxed{P(B) = 1}$

Exercice 7 . Limite monotone – 3

Un joueur dispose de 2 euros et joue au jeu suivant : il lance une pièce de monnaie équilibrée et perd 1 € s'il obtient Pile et gagne un bonbon s'il obtient Face. Il recommence ainsi indéfiniment jusqu'à avoir perdu ses 2 €. Pour modéliser cette expérience, on considèrera qu'il répète en fait indéfiniment cette expérience mais que lorsqu'il n'a plus d'argent, à chaque lancer il ne perd plus d'argent ni ne gagne de bonbon.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note :

- X_k la variable aléatoire donnant le nombre de Piles obtenus lors de k premiers lancers.
- A_k l'évènement « le joueur a encore 2 Euros à l'issue du k-ième lancer ».
- B_k l'évènement « le joueur a encore exactement 1 Euros à l'issue du k-ième lancer ».
- R_k l'évènement « le joueur a 0 euros (et est donc ruiné) à l'issue du k-ième lancer ».
- R l'évènement « le joueur finit ruiné » autrement dit « le jeu finit par s'arrêter ».

X_k

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k. On précisera la valeur de $P(X_k = i)$ pour $i \in X_k(\Omega)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a. Déterminer $P(A_k)$.
   b. Déterminer $P(B_k)$.
   c. En déduire $P(R_k)$.
3. En déduire que le joueur finira presque surement ruiné.

lancers identiques et indép ?

1.

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k ; \frac{1}{2}\right)$$

nbre de lancers — probabilité d'1 Pile

$$X_k(\Omega) = [\![0, k]\!]$$

$$\left(\left(P(X=n) = \binom{n}{k} p^h (1-p)^{n-h}\right)\right)$$

Soit $i \in [\![0, k]\!]$, $P(X_k = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{P(X_k = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k} .$$

2. a. $P(A_k) = P(X_k = 0)$

$$= \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{P(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

b. $P(B_k) = P(X_k = 1) = \binom{k}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

c. $P(R_k) = P(X_k \geq 2)$

$$= 1 - P(X_k \leq 1)$$

$$= 1 - \left(P(X_k = 0) + P(X_k = 1)\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

3. Calculons $P(R)$

$\cancel{R = \bigcap R_k}$ ou $R = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k$

$$P(R) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right)$$

Si R_k se réalise alors R_{k+1} aussi (s'il est ruiné au k-ième lancer, alors il est ruiné au k+1-ième lancer)..

$(R_k \subset R_{k+1})$

La suite d'évènements (R_k) est $\nearrow$.

Donc, d'après le TLM :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(R_k)$$

Donc $\mathbb{P}(R) = \lim_{k \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^k \longrightarrow 0$

$k\left(\frac{1}{2}\right)^k \longrightarrow 0$ par crois. comparée

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R) = 1}$