DS08 – Séries et espaces vectoriels

Calculatrice non autorisée. La note de ce DS ne comptera pas dans la moyenne, donc jouez le jeu.
Renvoyez votre copie scannée sous forme d'un seul pdf, sur cahier-de-prépa.fr

Exercice 1 – séries numériques :

1. **Questions de cours.**
   - **a.** Donner, selon la valeur de q, la nature de la série suivante, ainsi que sa somme en cas de convergence.
   $$\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$$
   - **b.** Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série positive.

2. **Donner, en justifiant, la nature des série suivantes :**
   - **a.**
   $$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n + \sqrt{n}}{n^2+3n+1}$$
   - **b.**
   $$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3}$$
   - **c.**
   $$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
   - **d.**
   $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n$$

3. **Vrai ou Faux ? (Si vous répondez faux, vous devez fournir un contre-exemple).**
   - **a.** $u_n \to 0$ implique $\sum u_n$ converge.
   - **b.** Si $\sum u_n$ est bornée alors elle converge.
   - **c.** Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs et que $u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 – Espaces vectoriels

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(a+b, a, 2a-b, b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de F dont vous donnerez une base et la dimension.
2. Même question pour G.
3. Déterminer une base de $F \cap G$ et vérifiez que $\dim F \cap G = 1$.
4. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
5. Déterminer un supplémentaire H de F dans $\mathbb{R}^4$.

Problème : Etude d'un produit infini.

Dans **tout** le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments **non nuls** de $\mathbb{R}$. On lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

Partie 1 : étude d'exemples.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose pour cette question uniquement que (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \alpha$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que (p_n) converge.

2. On suppose pour cette question uniquement que (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = e^{\frac{1}{n}}.$$

Démontrer que dans ce cas, $p_n \to +\infty$.

3. On suppose pour cette question uniquement que (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) = \ln(n+1)$

b. En déduire la limite de (p_n).

Partie 2 : étude du cas général.

4. ***Résultat préliminaire.***

Cette question vise à démontrer un résultat qui sera utile uniquement pour la question 9.

a. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. A l'aide de la formule de Taylor Lagrange, démontrer que :

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{8x^3}{3}$$

En déduire que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0$$

b. En déduire que si (u_n) est une suite qui tend vers 0, alors

$$\ln(1+u_n) - \left(u_n - \frac{u_n^2}{2}\right) = o(u_n^2)$$

c. En déduire que si (u_n) est une suite qui tend vers 0, alors

$$\ln(1+u_n) = u_n + v_n \ \text{ avec } v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

Tourner la page ⟶

On revient maintenant au problème général.

5. Donner un exemple de suite (a_n) telle que $p_n \to 0$

6. Prouver que si (p_n) converge vers un réel $\ell \neq 0$, alors $a_n \to 1$.

7. On suppose dans cette question que la suite (a_n) est strictement positive à partir d'un certain rang. C'est-à-dire qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour $n > n_0$, $a_n > 0$.
On pose, pour tout $n > n_0$:

$$q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$$

- **a.** Exprimer, pour $n > n_0$, p_n à l'aide de p_{n_0} et q_n.
- **b.** On suppose que $\sum \ln(a_n)$ converge.
  - i. Montrer que $(\ln(q_n))$ converge.
  - ii. En déduire que que (p_n) converge vers une limite non nulle.
- **c.** Montrer que si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$, alors $p_n \to 0$.
- **d.** Montrer que si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$, alors $p_n \to +\infty$ ou $p_n \to -\infty$ selon le signe de p_{n_0}.

Dans ce qui suit, on définit, pour tout $n \geq 1,\ u_n$ par $u_n = a_n - 1$. On a donc $a_n = 1 + u_n$.

8. On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 1,\ u_n \geq 0$.
Montrer que (p_n) converge vers un réel $\ell > 0$ si et seulement si $\sum u_n$ converge.

9. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ converge (u_n n'est plus nécessairement positif).
On pensera pour cette question à utiliser le résultat préliminaire (question 4).

- **a.** Montrer que si $\sum u_n^2$ converge, alors (p_n) converge vers une limite non nulle.
- **b.** En déduire que si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors (p_n) converge vers une limite non nulle.
- **c.** Montrer que si $\sum u_n^2$ diverge, alors (p_n) tend vers 0.

10. On suppose dans cette question que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite de (p_n) selon la valeur de α.