Chapitre 20

Espaces probabilisés infinis

Table des matières

1 Espace probabilisable

1.1 Intersection et réunion d'un famille infinie d'événements

Définition 1. (Intersection et réunion d'un famille infinie d'événements)
Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille infinie de parties de E. On définit les ensembles $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ comme suit :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{x \in E \,|\exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\right\}$$

et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{x \in E \,|\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\right\}$$

Remarque : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ se note aussi $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ ou $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ ou encore $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$.

De même $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ se note aussi $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ ou $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ ou encore $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n$.

Attention ! Contrairement aux séries, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ et $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n$ signifient la même chose !

Remarque.
On définit de même $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ou $\bigcup\limits_{n\geq 2} A_n$ ou même $\bigcup\limits_{n\in I} A_n$ où I est une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$.
Idem avec les $\bigcap$.

Si vous avez des difficultés à comprendre la définition ci-dessus, c'est surtout ce qui est écrit en gras dans la remarque ci-dessous qu'il faut retenir.

Remarque. On a donc :

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n$$

$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est donc l'ensemble des éléments qui sont contenus dans au moins un A_n.

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n$$

$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est donc l'ensemble des éléments qui sont contenus dans tous les A_n.

Exemple 1. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \left[1, 1+\dfrac{1}{n}\right]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\bigcup_{n \in [\![1,4]\!]} A_n = \bigcup_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 &= [1,2] \cup \left[1, 1+\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, 1+\frac{1}{3}\right] \cup \left[1, 1+\frac{1}{4}\right] \\ &= [1,2] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{4}\right] \\ &= [1,2]\end{aligned}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n = [1,2]$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = [1,2]$$

$$\bigcap_{n \in [\![1,4]\!]} A_n = \bigcap_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = [1,2] \cap \left[1, \frac{3}{2}\right] \cap \left[1, \frac{4}{3}\right] \cap \left[1, \frac{5}{4}\right] = \left[1, \frac{5}{4}\right]$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{1\}$$

Proposition 1. (Interprétation de unions et d'intersections infinies d'évènements) (admis)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'évènements. On a les interprétations suivantes :

- $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{10} A_i$ $= A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{10}$ est l'évènement "Il existe un rang i compris entre 0 et 10 tel que A_i se réalise."
"Un des A_i se réalise pour $i \in [0,10]$"
- $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{10} A_i$ est l'évènement "Pour tout rang i compris entre 0 et 10, A_i se réalise."
"Tous les A_i se réalisent pour $i \in [\![1,10]\!]$"
- $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ est l'évènement "Il existe un rang i tel que A_i se réalise."
"Un des A_i se réalise (pour $i \geq 0$)"
- $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$ est l'évènement "Pour tout rang i, A_i se réalise."
"Tous les A_i se réalisent (pour $i \geq 0$)".
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'évènement $\displaystyle\bigcup_{j\geq i} A_j$ est l'évènement "Il existe un rang $j \geq i$ tel que A_j se réalise".
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'évènement $\displaystyle\bigcap_{j\geq i} A_j$ est l'évènement "Pour tout rang $j \geq i$, A_j se réalise"
- $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty}\bigcup_{j\geq i} A_j$ est l'évènement "Pour tout i, il existe un rang $j \geq i$ tel que A_j se réalise" ou encore "Il y a une infinité de A_j qui se réalisent".
- $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty}\bigcap_{j\geq i} A_j$ est l'évènement "Il existe un rang i, tel que pour tout $j \geq i$, A_j se réalise" ou encore "Il existe un rang à partir duquel tous les A_j se réalisent".

Exemple 2. On considère l'expérience consistant à lancer indéfiniment un dé.
On note F_i l'évènement "On obtient 6 au i-ème lancer". Alors :

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{10} F_i$ $= F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{10}$ est l'évènement "On obtient au moins un 6 lors des 10 premiers lancers".
- $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{10} F_i$ $= F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{10}$ est l'évènement "On n'obtient que des 6 lors des 10 premiers lancers".
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$ $\to$ "l'un des F_i au $\ominus$ se réalise" est l'évènement "On obtient au moins un 6 lors de la partie".
- $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$ "Tous les F_i se réalisent". est l'évènement "On n'obtient que des 6 lors de la partie".
- Pour tout $i \geq 1$, l'évènement $\displaystyle\bigcup_{j\geq i} F_j$ est l'évènement "On obtient au moins un 6 à partir du i-ème lancer".
- Pour tout $i \geq 1$, l'évènement $\displaystyle\bigcap_{j\geq i} F_j$ est l'évènement "On n'obtient que des 6 à partir du i-ème lancer".

- $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j \geq i} F_j$ est l'évènement "Pour tout i, on obtient au moins un 6 à partir du i-ième lancer" ou encore "on obtient une infinité de 6 lors de la partie".
- $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j \geq i} F_j$ est l'évènement "Il existe un rang i tel que, on n'obtient que des 6 à partir du i-ième lancer" ou encore "Il existe un rang à partir duquel on obtient que des 6".

→ expérience de pensée "idéale"

$\Omega = [0,1]$ ← dans $[0,1]$, il y a une infinité non dénombrable de nombres "inimaginables" (cf. micmaths).

1.2 Tribu

Dans le chapitre 11, on avait considéré que les évènements d'une expérience aléatoire d'univers Ω étaient *toutes* les parties de Ω. Ce n'est en fait pas obligatoire et, pour des raisons techniques, pas possible lorsque Ω est un ensemble *infini non dénombrable* (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ ou même $[0, 1]$).

Pour définir une probabilité, on a besoin d'avoir au préalable défini une famille de partie (pas forcément toutes les parties donc) qui seront les évènements de notre expérience. Mais on ne peut pas choisir cette famille n'importe comment. Il faut que cette famille soit une **tribu** de l'univers.

Définition 2. (Tribu)
Soit Ω un ensemble (non nécessairement fini) et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω.
On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall E \in \mathcal{A}, \overline{E} \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : pour toute famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

Exemple 3. tribus de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \underbrace{\{1,2\}}, \underbrace{\{3,4\}}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,5,6\}, \Omega\}$.

$\{1,2,3,4\}, \{5,6\}$

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ est un tribu sur Ω. ← Tribu engendrée par $\{1\}$.
- $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ est un tribu sur Ω. ← Tribu engendrée par $\{1,2\}, \{3,4\}$.
- etc...

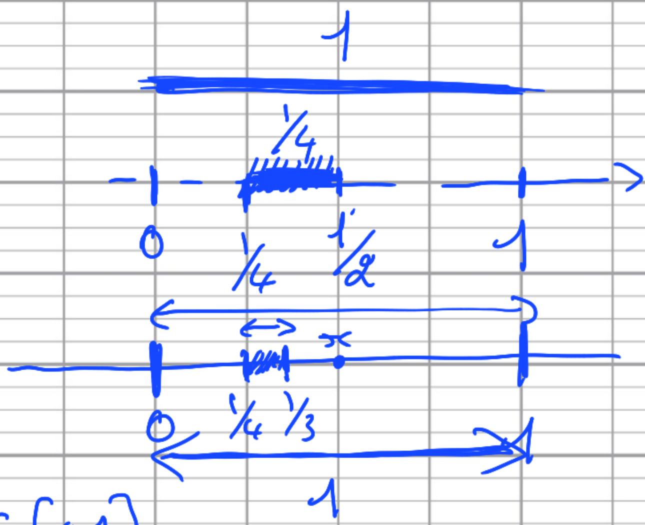
Les propositions suivantes nous assurent que les éléments d'une tribu permettent bien d'effectuer tous les calculs de probabilité habituels.

$\Omega = [0,1]$ → Proba uniforme.

→ $X \in [0,1]$

$P(\{0,5\}) = 0$

$P(X \in [0;\tfrac{1}{2}]) = \dfrac{1}{2}$



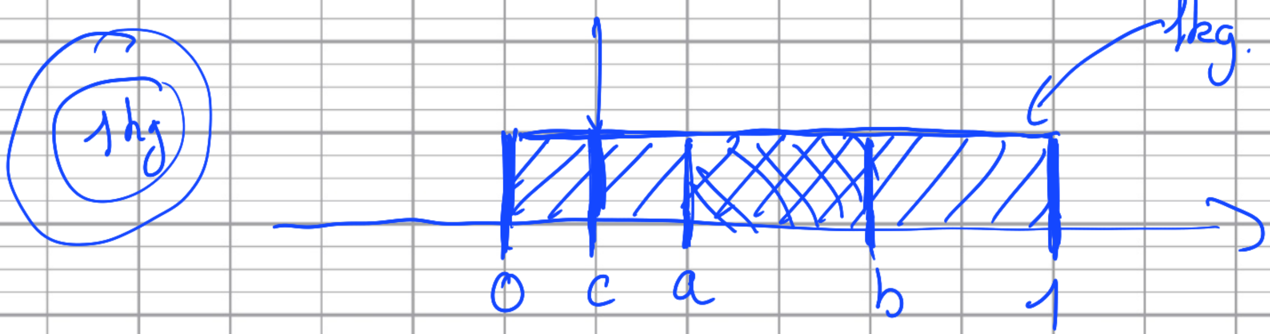
$P(X = \tfrac{1}{2}) = 0$

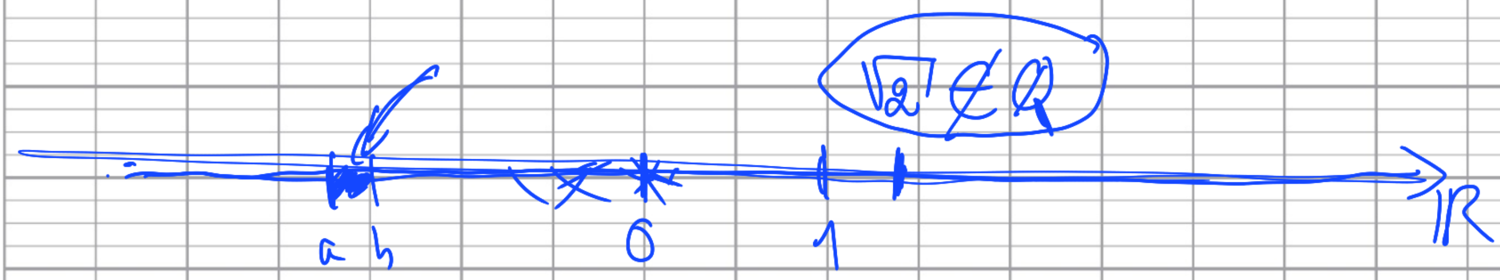
→ $X = \underline{\underline{a}} \in [0,1]$

$\{X=a\}$ est presque impossible mais pas impossible.

Il existe des parties de $[0,1]$ (Très compliquées) pour lesquelles on ne peut pas définir de probabilité.

$P(X=\tfrac{1}{2})$ → $0,500000000000 \ldots$





$x^2 - 2 = 0$

e, π

Proposition 2. (L'ensemble vide est toujours un évènement)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω, on a toujours $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Proposition 3. (Toute union ou intersection finie ou dénombrable d'évènements est un évènement)
Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω et $(A_n)_{n\geq 0}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$

et

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Proposition 4. (Tribu engendrée par une famille de parties)
Soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille de parties de Ω. Il existe une tribu $\mathcal{A}$ qui est la plus petite tribu au sens de l'inclusion contenant tous les A_n pour $n \in I$: elle est appelée tribu engendrée par la famille $(A_n)_{n\in I}$

~~**Exemple 4.** Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Donner la tribu engendrée par la famille $\left\{\{1, 2\}, \{3\}\right\}$.~~

Définition 3. (Système complet d'évènements)
Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}\right)$ un espace probabilisable et I une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$.
Une famille $(A_n)_{n\in I}$ d'évènements forme un **système complet d'événements** de Ω si

1. Les évènements sont 2 à 2 incompatibles, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{n\in I} A_n = \Omega$.

Autrement dit *: Intuitivement, un s.c.e. est une famille d'évènements dont un et seul des évènements va "obligatoirement" se réaliser*

Attention ! Si l'univers est infini, un s.c.e. peut être fini ou infini.

Exemple 5.
On lance une infinité de fois un dé.

- Si on note, pour tout $n \geq 1$, A_n l'évènement "Le premier 6 obtenu est obtenu au n-ième lancer" et A_0 l'évènement "on n'obtient jamais un 6", alors $(A_n)_{n\geq 0}$ est un système complet d'évènements.
- Si on note E_∞ l'évènement "obtenir une infinité de 6", et $\forall i \in \mathbb{N}$, E_i : "obtenir exactement i 6". Alors $(E_\infty, E_0, E_1, \ldots)$ est un système complet d'événements.

A_0 A_1 A_2 ⋮ A_n ⋮

E_∞ E_0 E_1 E_2 ⋮

- Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $\quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
- Si A_1, A_2, A_3 2 à 2 incompatibles

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

- Si $A_1, \dots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

$$\Longleftrightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- Par définition :

Si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une fam. infinie

2 Espace probabilisé

2.1 Définition

Définition 4. (Espace probabilisé)
Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour toute famille $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'événements 2 **à** 2 **incompatibles**, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} P(A_n)$ converge et

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est la probabilité de A.

Remarque. La deuxième condition se dit : "P est σ-additive". Il faut bien la retenir. On peut l'énoncer comme suit :

$$\boxed{\textbf{Si les } A_n \textbf{ sont } 2 \textbf{ à } 2 \textbf{ incompatibles, alors } \begin{cases} \textbf{la série } \sum\limits_{n \geq n_0} P(A_n) \textbf{ converge} \\ \textbf{et} \\ P\left(\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) \end{cases}}$$

Autrement dit : La probabilité d'une réunion, finie ou infinie, d'évènements 2 à 2 incompatibles, est la somme des probabilités de ces évènements

Remarque. Toutes les propriétés d'une probabilité vues dans le premier chapitre restent vraies. Autrement dit :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Pour toute famille d'évènements **2 à 2 incompatibles** $A_1, \ldots, A_n$, $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Exercice de cours 1.
On lance une infinité de fois un dé équilibré. On note, pour tout $n \geq 1$, S_n l'évènement "le n-ième lancer donne 6" et A_n l'évènement "Le premier 6 obtenu est obtenu au n-ième lancer".

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$.
2. En déduire la probabilité de l'évènement A : "Obtenir au moins un 6".

1. $P(A_n) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n)$ lancers indépendants.

$= P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2}) \dots \times P(\overline{S_n}) \times P(S_n)$

$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$

$$\boxed{P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}}$$

2. $P(A) = P\left(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n}\right)$

$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ l'un des S_n se réalise

⚠ les S_n ne sont pas 2 à 2 incompatibles.
S_1 et S_2 peuvent se réaliser en même temps.

⚠ $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n\right) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n)$.

$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ (on obtient au + un 6 ssi l'un des A_n se réalise)

$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

<u>Les A_n sont 2 à 2 incompatibles</u>

Donc $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$ converge

Si $n \neq m$, A_n et A_m ne peuvent pas se réaliser en m̄ temps. car le 1er 6 obtenu ne peut pas "arriver" au rang n <u>et</u> au rang m.

et $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

existe et est un réel car $\sum_{n\geq 1} P(A_n)$ converge.

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

Or $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$n' = n-1$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n'=0}^{N-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n'}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(5/6\right)^N}{1-5/6}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-5/6} = 1.$$

Donc $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1.$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A) = 1}$$

$\sum_{n\geq 1} P(A_n)$ converge $\Leftrightarrow$ $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$ existe et est finie la serie de terme général $P(A_n)$.

2.2 Évènements négligeables et Évènements presque-sûr

Définition 5. (Évènements négligeables et Évènements presque-sûr)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable si $P(A) = 0$ et presque-sûr si $P(A) = 1$.

(ou presque-impossible) ou presque certain.

Attention ! Ne pas confondre événement négligeable et événement impossible ni événement presque-sûr et événement certain !

Par exemple dans l'exercice 2 ci-dessus, on a vu que l'évènement A "obtenir au moins un 6" est presque-sûr puisque sa probabilité vaut 1.
Mais ce n'est pas l'évènement certain car il n'est pas égal à l'univers tout entier. En effet, il y a des issues qui ne réalisent pas cet évènement :

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots) \notin A$$
$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots) \notin A$$
etc...

De même, l'évènement "ne pas obtenir de 6" est négligeable, puisque sa probabilité vaut 0 (c'est le contraire de l'évènement A) mais pas impossible : par exemple l'issue $(1, 1, 1, 1, 1, \cdots)$ réalise cet évènement.

2.3 Théorème de la limite monotone

Proposition 5. (Théorème de la limite monotone)

1. Si $(A_n)_{n\geq n_0}$ est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire $\forall n \geq n_0, A_n \subset A_{n+1}$, alors la suite $\big(P(A_n)\big)_{n\geq n_0}$ est convergente et
$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
2. Si $(A_n)_{n\geq n_0}$ est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire $\forall n \geq n_0, A_{n+1} \subset A_n$, alors la suite $\big(P(A_n)\big)_{n\geq n_0}$ est convergente et
$$P\Big(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Remarque. Comment déterminer en pratique qu'une suite d'évènement est (dé)croissante.

- $(A_n)_{n\geq n_0}$ croissante signifie concrètement que si A_n se réalise alors A_{n+1} aussi.
- $(A_n)_{n\geq n_0}$ décroissante signifie concrètement que si A_{n+1} se réalise alors A_n aussi.

Voir l'exemple ci-dessous.

Exercice de cours 2.
Calculer la probabilité de ne jamais obtenir de 6 dans le cas d'une infinité de lancers de dés.
On notera pour tout entier $n \geq 1$, B_n l'événement "ne pas obtenir de 6 sur les n premiers lancers" et B l'événement "ne jamais obtenir de 6".

Remarque. On a redémontré ci-dessus un résultat qu'on avait déjà obtenu à l'exemple **??**, puisque l'évènement B est le contraire de l'évènement A de l'exemple **??**. Notons que dans l'exemple **??** on ne pouvait pas utiliser le théorème de la limite monotone pour calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ car la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ n'était pas croissante.

Si on doit calculer $P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right)$ ou $P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right)$, on peut toujours utiliser le théorème ci-dessous. Qu'il faut donc retenir absolument :

Proposition 6. (Probabilité d'une union ou d'une intersection infinie - cas général) (*Voir la preuve*)
Soit $(A_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'événements, alors

$$\left(P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} R_k\right)\right)$$

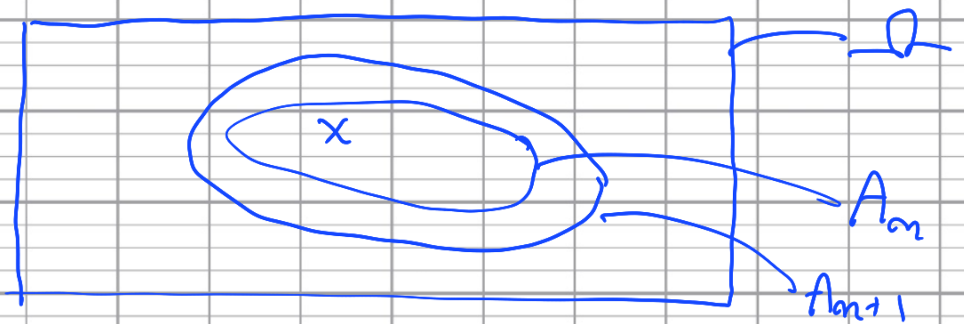
- $P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=n_0}^{N} A_n\right)$
- $P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=n_0}^{N} A_n\right)$

Utile parfois

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = ?$$

Les A_n forment une suite ↗ d'évènements si $\underbrace{A_n \subset A_{n+1}}$

Si A_n se réalise alors A_{n+1} aussi.

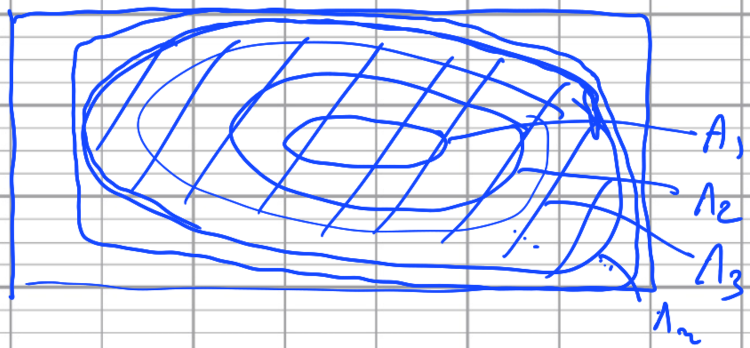


$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

Si les (A_n) forment une suite ↘ d'évènements

$$A_{n+1} \subset A_n$$

Si A_{n+1} se réalise alors A_n se réalise



$A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_n.$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

Exercice de cours 2.
Calculer la probabilité de ne jamais obtenir de 6 dans le cas d'une infinité de lancers de dés équilibré.
On notera pour tout entier $n \geq 1$, B_n l'événement "ne pas obtenir de 6 sur les n premiers lancers" et B l'événement "ne jamais obtenir de 6".

On veut calculer $P(B)$.

$$B = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap \dots$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Probabilité d'une intersection infinie !

$$P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

- 1ère option : TLM
- 2ème option : passer par le complémentaire :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n}\right)$$

$$= 1 - \underbrace{P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B_n}\right)}$$

On sait peut-être calculer si les $\overline{B_n}$ sont 2 à 2 incompatibles.

- 3ème option $\longrightarrow$ cf. prop. 6.

1ère option : Calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$

Est-ce que si B_{n+1} se réalise alors B_n aussi ?

$B_{n+1} \subset B_n$ $\quad (u_{n+1} < u_n)$

Si B_{n+1} se réalise alors B_n aussi, donc (B_n) est une suite décroissante d'événements.

Donc, d'après le TLM, la suite $(P(B_n))$ converge et :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$$

Notons S_k l'événement "Obtenir un 6 au k-ième lancer" :

$$P(B_n) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n})$$

lancers indépendants

$$= P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2}) \times \cdots \times P(\overline{S_n})$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}$$

$$P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\boxed{P(B) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ donc } B \text{ est presque impossible}}$$

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

Toute la partie du chapitre 11 reste valable. La formule des probabilités totales se généralise avec un système complet d'événements de taille infinie.

Proposition 7. (Formule des probabilités totales.)
Soit $(A_n)_{n\geq n_0}$ un système complet d'événements tel que $\forall n \geq n_0$, $P(A_n) \neq 0$. Alors pour tout événements B, on a

$$P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

La notion d'indépendance mutuelle se généralise aussi, il faut bien noter que l'indépendance mutuelle pour un nombre infini d'événements correspond à l'indépendance mutuelle de toute sous-famille finie de ces événements.

Définition 6. (Indépendance mutuelle d'une famille infinie d'évènements)
On dit que les évènements de la famille $(A_n)_{n\geq n_0}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si pour tout ensemble d'indices fini $I \subset \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Il faut surtout savoir reconnaître des évènements mutuellement indépendants à partir de l'expérience donnée (une suite de lancers, ou de tirages, mutuellement indépendants)

$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une fam. d'évén^{ts} mutuell^{ts} indép.

$\iff$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuell^t indép.

4 Preuves

Preuve de la proposition 6

Pour le premier point, si on pose, pour tout $n \geq n_0$, $B_n = \bigcup_{k=n_0}^{n} A_k$. Alors $(B_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante d'évènements.
Or $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n$ on conclut avec le TLM :

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=n_0}^{n} A_k\right)$$

La preuve du deuxième point est la même en changeant les $\cup$ et $\cap$ (et le "croissante" en "décroissante").
(*retour à la proposition 6*)