Exercice 1

a) $\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

On a alors $\sum_{n=1}^{100} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

b) Une série positive converge si et seulement si elle est bornée.

2. a. Notons $u_n = \frac{\ln n + \sqrt{n}}{n^2 + 3n + 1}$.

$u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2}$ car $\ln n = o(\sqrt{n})$

$\Longleftrightarrow u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

- $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$)

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n + \sqrt{n}}{n^2 + 3n + 1} \text{ converge}}$$

b. Notons $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$

$$n^2 u_n = \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{donc } \underline{u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

- $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann avec $\alpha > 1$)

Donc, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3} \text{ converge}}$$

c. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ et $\frac{1}{n} \geq 0$ car $\frac{1}{n} \in [0, \pi/2]$.

- $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Série de Riemann avec $\alpha \leq 1$).

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}}$$

d. $|(-1)^n| = 1 \not\to 0$ donc $(-1)^n \not\to 0$

Donc $\boxed{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \text{ diverge grossièrement.}}$

Ici, $\sum_{n=1}^{N} (-1)^n$ n'a pas de limite quand $N \to +\infty$:

$$\sum_{n=0}^{0} (-1)^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{1} (-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{2} (-1)^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{3} (-1)^n = 0$$

etc...

4. a. FAUX

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ et pourtant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

b. FAUX

$\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est bornée $\left(\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = 0 \text{ ou } 1 \right)$

et pourtant $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge (cf question 2.d).

c. FAUX

$\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

et pourtant $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

En fait si $u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on ne peut rien dire de $\sum u_n$: elle peut converger ou diverger :

$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Exercice 2

1. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$u \in F \iff 2x - y - z = 0$

$\iff y = z - 2x$

$\iff u = (x, z-2x, z, t)$

$\iff u = x\underbrace{(1,-2,0,0)}_{v_1} + z\underbrace{(0,1,1,0)}_{v_2} + t\underbrace{(0,0,0,1)}_{v_3}.$

$\iff u \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ et (v_1, v_2, v_3) en est une famille génératrice.

Montrons qu'elle est libre :

$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

$\iff (a, -2a, 0, 0) + (0, b, b, 0) + (0, 0, 0, c) = (0,0,0,0)$

$\iff (a, -2a+b, b, c) = (0,0,0,0)$

$\iff a = b = c = 0$

Donc (v_1, v_2, v_3) est libre.

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de F.

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ a donc pour base : } \big((1,-2,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\big). \\ \text{D'où } \dim F = 3 \end{array}}$$

2. Soit $u \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in G \iff u = (a+b,\ a,\ 2a-b,\ b)$$
$$\iff u = a(1,1,2,0) + b(1,0,-1,1)$$
$$\iff u \in \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,1,2,0)}_{v_4},\ \underbrace{(1,0,-1,1)}_{v_5}\big)$$

Donc $G = \operatorname{Vect}(v_4, v_5)$

Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ qui a pour famille génératrice (v_4, v_5).

Or v_4 et v_5 ne sont pas colinéaires, donc (v_4, v_5) est libre.

Donc G a pour base $\big((1,1,2,0), (1,0,-1,1)\big)$

et donc $\dim G = 2$.

3. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
u\in F\cap G &\iff u\in F \text{ et } u\in G\\
&\iff 2x-y-z=0 \text{ et } u=(a+b,\,a,\,2a-b,\,b)\\
&\iff 2(a+b)-a-(2a-b)=0 \text{ et } u=(a+b,\,a,\,2a-b,\,b)\\
&\iff -a+3b=0 \text{ et } u=(a+b,\,a,\,2a-b,\,b)\\
&\iff a=3b \text{ et } u=(4b,\,3b,\,5b,\,b)\\
&\iff u=b(4,3,5,1)\\
&\iff u\in \mathrm{Vect}\big((4,3,5,1)\big)
\end{aligned}$$

Donc $F\cap G=\mathrm{Vect}\big((4,3,5,1)\big)$

Donc $\boxed{\big((4,3,1,1)\big) \text{ est une base de } F\cap G \text{ et } \dim(F\cap G)=1.}$

4. F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ donc $F+G$ aussi.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$
$$= 3+2-1$$
$$= 4$$

D'où : $\begin{cases} F+G \subset \mathbb{R}^4 \\ \dim(F+G) = \dim(\mathbb{R}^4) \end{cases}$

Donc : $\boxed{F+G = \mathbb{R}^4}$

5. On cherche un s.e.v. H de $\mathbb{R}^4$ tel que $F \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Donc on doit avoir $\dim H = 1$

Il suffit de choisir $\boxed{H = \mathrm{Vect}\big((0,0,0,1)\big)}$

On a alors bien $H\cap F = \{0\}$.

Car sinon on aurait $1 \leqslant \dim(H\cap F) \leqslant \dim H = 1$,

donc $\dim(H\cap F) = 1$, donc $H\cap F = H$ et donc $H \subset F$.

Absurde car $(0,0,0,1) \in H$ et $(0,0,0,1) \notin F$.

Ainsi, avec ce choix de H, la somme $H\oplus F$ est directe.

et on a $\dim(H\oplus F) = \dim H + \dim F = 4$.

Donc $H\oplus F = \mathbb{R}^4$.

<u>Remarque</u> : On pouvait choisir un autre vecteur que $(0,0,0,1)$.

il fallait juste choisir un vecteur n'appartenant pas à F.

Problème :

Partie 1

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
$$= \alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha$$
$$= \alpha^n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \alpha^n$

$$\boxed{(p_n) \text{ converge donc ssi } |\alpha| < 1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p_n = e^1 \times e^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{3}} \times \cdots \times e^{\frac{1}{n}}$$
$$= e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

Or $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$)

et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ (Une série positive ne peut diverger que vers $+\infty$).

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $\ln(p_n) = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$

$$= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k$$

$$= \ln(n+1) - \ln(1)$$

$$= \ln(n+1).$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(p_n) = \ln(n+1)}$$

b. $p_n = e^{\ln(p_n)} \longrightarrow +\infty$ car $\ln(p_n) \longrightarrow +\infty$.

D'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty}$

4. a. On rappelle la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x :

$$\left| f(x) - \left(f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) \right) \right| \leqslant M \frac{|x|^3}{3!}$$

où M est un majorant de $|f^3(t)|$ sur $[0,x]$

On l'applique avec $f(x) = \ln(1+x)$

- $f(x) = \ln(1+x) \longrightarrow f(0) = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x} \longrightarrow f'(0) = 1$
- $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \longrightarrow f''(0) = -1$
- $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \longrightarrow |f^{(3)}(t)| = \frac{2}{|1+t|^3} = \frac{2}{(1+t)^3}$ car $t > -1$.

Or $x \in [-½, ½]$, donc pour tout $t \in [0,x]$ (ou $[x,0]$),

$$t \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 1+t \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow (1+t)^3 \geqslant \frac{1}{8}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{(1+t)^3} \leqslant 16$$

$$\Longleftrightarrow |f^{(3)}(t)| \leqslant 16$$

On prend donc $M = 16$, et on a :

$$\forall x \in [-½, ½], \left| \ln(1+x) - \left(0 + x - \frac{x^2}{2}\right) \right| \leqslant 16 \times \frac{|x|^3}{6}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| \leqslant \frac{8|x|^3}{3}}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \frac{\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right|}{|x|^2} \leqslant \frac{8|x|}{3}$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to 0} 8\frac{|x|}{3} = 0$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} \right| = 0$$

D'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0}$

c. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+u_n) - \left(u_n - \frac{u_n^2}{2}\right)}{u_n^2} = 0$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln(1+u_n) - \left(u_n - \frac{u_n^2}{2}\right) = o\left(u_n^2\right).}$$

d. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \longrightarrow 0$.

On a $\ln(1+u_n) - \left(u_n - \frac{u_n^2}{2}\right) = o(u_n^2)$

$$\Longleftrightarrow \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

Or $-\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = -\frac{u_n^2}{2} + o\left(\frac{u_n^2}{2}\right) \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

On a donc bien $\boxed{\ln(1+u_n) = u_n + v_n \text{ avec } v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}}$.

5. Il suffit de prendre pour (a_n) la suite constante égale à $\frac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{2}$.

6. Supposons que $p_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$.

On a, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{a_1 \times \cdots \times a_n}{a_1 \times \cdots \times a_{n-1}} = \frac{\cancel{a_1} \times \cdots \times \cancel{a_{n-1}} \times a_n}{\cancel{a_1} \times \cdots \times \cancel{a_{n-1}}} = a_n$$

Or $p_n \longrightarrow \ell$ et $p_{n-1} \longrightarrow \ell \neq 0$

D'où $\frac{p_n}{p_{n-1}} \longrightarrow \frac{\ell}{\ell} = 1$

Donc $\boxed{a_n \longrightarrow 1}$

7. a. $p_n = \underbrace{a_1 \times \cdots \times a_{n_0}}_{p_{n_0}} \times \underbrace{a_{n_0+1} \times \cdots \times a_n}_{q_n} = p_{n_0} \times q_n$

Donc $\boxed{p_n = p_{n_0} \times q_n}$

7b.i $q_n > 0$ par définition de n_0, donc $\ln(q_n)$ existe.

$$\text{Et } \ln(q_n) = \ln\left(\prod_{k=n_0+1}^{n} a_k\right)$$

$$= \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k)$$

Or $\sum \ln(a_k)$ converge

$$\text{Donc } \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \mathbb{R}.$$

Donc $\boxed{\ln(q_n) \longrightarrow L \in \mathbb{R}}$

7.b.ii. $\ln(q_n) \longrightarrow L$ donc $q_n = e^{\ln(q_n)} \longrightarrow e^L > 0$.

Donc $\boxed{p_n \longrightarrow p_{n_0} \times e^L \neq 0 \quad \text{car} \quad p_{n_0} \neq 0}$

7.c. Si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

$\iff \ln(q_n) \longrightarrow -\infty$

Donc $q_n = e^{\ln(q_n)} \longrightarrow 0$

Or $p_n = p_{n_0} q_n$ Donc $\boxed{p_n \longrightarrow 0}$

Si $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

$\iff \ln(q_n) \longrightarrow +\infty$

Donc $q_n = e^{\ln(q_n)} \longrightarrow +\infty$

Or $p_n = p_{n_0} q_n$

Donc $p_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } p_{n_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } p_{n_0} < 0. \end{cases}$

8. $\sum u_n$ est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.
De plus, remarquons que $\forall n \geq 1$, $a_n > 0$ car $u_n \geq 0$
Donc la question 7 s'applique ici.

* Supposons que $p_n \longrightarrow \ell > 0$ et montrons que $\sum u_n$ converge.

$p_n \longrightarrow \ell \neq 0$, donc, d'après la question 6, $a_n \longrightarrow 1$.

Donc $u_n \longrightarrow 0$ et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum \ln(\underbrace{1+u_n}_{a_n})$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Supposons, par l'absurde, que $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$).

Alors $\sum \ln(1+u_n)$ diverge, i.e. $\sum \ln(a_n)$ diverge

Donc, d'après la question 7.d, $p_n \longrightarrow \pm\infty$

Absurde car $p_n \longrightarrow \ell$. Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

** Supposons maintenant que $\sum u_n$ converge et montrons que $p_n \longrightarrow \ell > 0$.

$\sum u_n$ converge donc $u_n \longrightarrow 0$

donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$

donc $\sum \ln(\underbrace{1+u_n}_{a_n})$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

donc $\sum \ln(a_n)$ converge

donc, d'après la question 7.b, $p_n \longrightarrow \ell \neq 0$.

Or $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 0$ donc $a_n > 0$ donc $p_n > 0$

Donc $\ell > 0$.

Donc $p_n \longrightarrow \ell > 0$

Ainsi, par * et **,

$$\boxed{p_n \longrightarrow \ell > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \sum u_n \text{ converge}}$$

9. a. Supposons que $\sum u_n^2$ converge et montrons que $p_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$

$\sum u_n$ converge, donc $u_n \longrightarrow 0$

donc $\ln(1+u_n) = u_n + v_n$ avec $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

Donc $-v_n \sim \frac{u_n^2}{2}$

Or $\sum u_n^2$ converge donc $\sum \frac{u_n^2}{2}$ converge

Donc, par le critère d'équivalence, $\sum -v_n$ converge

Donc $\sum v_n$ converge.

D'où $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge,

donc $\sum u_n + v_n$ converge

D'où $\sum \ln(1+u_n)$ converge

$\Longleftrightarrow \sum \ln(a_n)$ converge.

Or $u_n \longrightarrow 0$ (car $\sum u_n$ converge) donc $a_n \longrightarrow 1$.

Donc $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc la question 7 s'applique et donc, par 7.b, $\boxed{p_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*.}$

b. Supposons que $\sum u_n$ converge absolument et montrons que $p_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$

$\sum u_n$ converge donc $u_n \longrightarrow 0$ donc $|u_n| \longrightarrow 0$.

donc $|u_n| \in [0, 1[$ à partir d'un certain rang.

donc $u_n^2 \leq |u_n|$ à partir d'un certai

Or $\sum |u_n|$ converge, donc, par le critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n^2$ converge.

Donc, d'après la question 9.a, $\boxed{p_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*}$

9c. Supposons que $\sum u_n^2$ diverge et montrons que $p_n \longrightarrow 0$.

$\sum u_n$ converge donc $u_n \longrightarrow 0$

donc $\ln(1+u_n) = u_n + v_n$ avec $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$

donc $-v_n \sim \frac{u_n^2}{2}$.

Or $\sum \frac{u_n^2}{2}$ diverge (vers $+\infty$) donc $\sum -v_n$ diverge vers $+\infty$.

donc $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$.

Or $\sum u_n$ converge

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n + \sum_{n=1}^{N} v_n = -\infty$.

Donc $\sum \ln(1+u_n)$ diverge vers $-\infty$.

Donc, d'après 7.c (qui s'applique bien ici) : $\boxed{p_n \to 0}$

10. $\alpha>0$ donc $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$

donc $\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$ donc $\left|\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$

• Si $\alpha>1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc $\sum \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|}_{|u_n|}$ converge

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge absolument

Donc, d'après 9.b, $p_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$.

• Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}_{u_n}$ diverge

Or $\ln(a_n) = \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

Donc $\sum \ln(a_n)$ diverge

$\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ car $\forall n \geq 1$, $\ln(a_n) \geq 0$

car $\forall n \geq 1$, $a_n \geq 1$

car $\forall n \geq 1$, $\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \geq 0$.

et $\forall n \geq 1$, $a_n > 0$ donc la question 7 s'applique,

donc $\boxed{p_n \longrightarrow +\infty}$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \alpha > 1,\ p_n \longrightarrow \ell > 0 \\ \text{Si } \alpha \leq 1,\ p_n \longrightarrow +\infty \end{array}}$$