Exercice 8 .

Un joueur joue au jeu suivant à l'aide d'une pièce équilibrée.

- A la première étape, il lance une fois la pièce. Si elle tombe sur Pile, il a gagné, sinon il passe à la seconde étape.
- A la seconde étape, il lance deux fois la pièce. S'il obtient deux Pile, il a gagné, sinon il passe à l'étape suivante.
- Il recommence ainsi de suite, à l'infini : A la k-ième étape, il lance k fois la pièce. Si elle tombe k fois sur Pile, il a gagné. Sinon il passe à l'étape suivante.

On note A_n l'évènement « le joueur n'a toujours pas gagné à l'issue de la n-ième étape ».

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

2. Justifier que la suite $\big(\ln(P(A_n))\big)_{n\geq 1}$ tend vers une limite finie a.

3. En déduire que le joueur a une probabilité non nulle de ne jamais gagner.

1. BROUILLON

$P(A_1) = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2})$

$= P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})$ $\leftarrow$ 2ème étape : $P_{\overline{G_1}}(G_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

$P(A_3) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3})$

$= P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \times P_{\overline{G_1} \cap \overline{G_2}}(\overline{G_3})$

$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$

1. On note G_n l'évènement " le joueur gagne à la n-ième étape".
Lorsqu'on est à la n-ième étape, la probabilité de gagner vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (car on sait que la proba d'obtenir n fois Pile lors de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^n$)
Donc la probabilité de perdre à la n-ième étape vaut :
$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{1 - \frac{1}{2^n}}$

$$P(A_n) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_n})$$

$$= P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \times \cdots \times P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}}}(\overline{G_n})$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

D'où $\boxed{P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}$

2. $$\ln\left(P(A_n)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\boxed{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln a_k)}$$

Montrons que la série $\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ converge

On pose $u_k = \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

si $a_k \to 0$
$\ln(1 + a_k) \sim a_k$
avec $a_k = -\frac{1}{2^k}$

Alors $u_k \sim -\frac{1}{2^k}$ car $-\frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$

Donc $-u_k \sim \frac{1}{2^k}$

- $\frac{1}{2^k} > 0$ et $-u_k > 0$ $\left(\text{car } \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) < 0 \text{ car } 1-\frac{1}{2^k} < 1\right)$
- $\sum_{k\geq 1} \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{q^k \text{ avec } q=\frac{1}{2}}$ converge $\left(\text{série géométrique de raison } \frac{1}{2} \in]-1,1[\right)$

Donc, par le critère d'équiv. des séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 1} -u_k$ converge

Donc $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ existe et est finie

D'où $\boxed{\left(\ln(P(A_n))\right) \text{ converge vers un réel } a}$.

3. "Ne jamais gagner" est l'évènement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

On cherche donc $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$.

Or si A_{n+1} se réalise alors A_n aussi.
$(A_{n+1} \subset A_n)$
Donc la suite d'évènements (A_n) est décroissante.
Donc, d'après le théorème de la limite monotone :

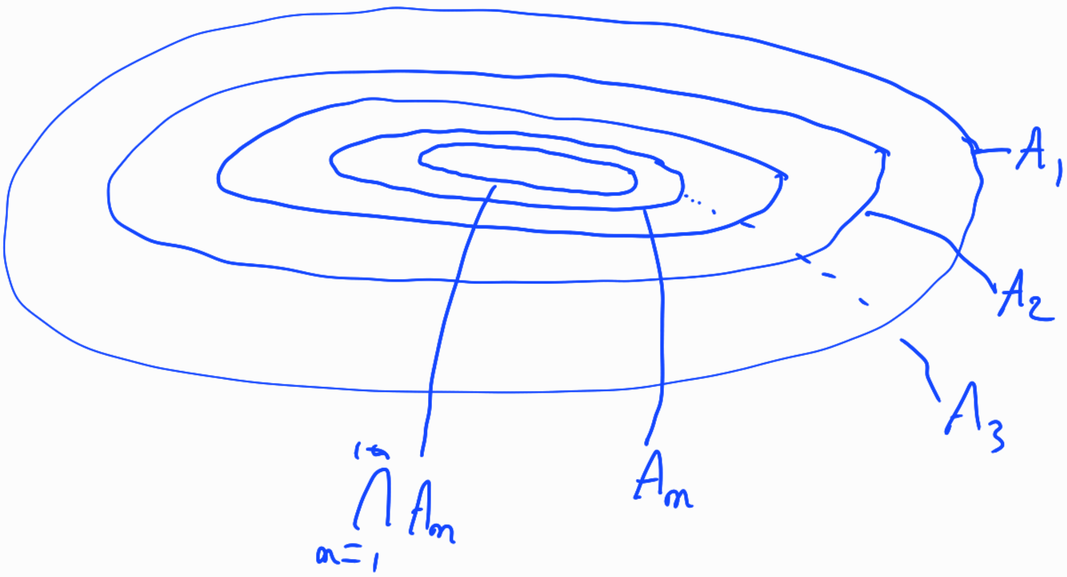
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(P(A_n)\right) = a$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\ln(P(A_n))} = e^a$

D'où : $\boxed{P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = e^a > 0}$

Remarque :



$$P(A_3) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{64}$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \frac{21}{64}.$$

Exercice 9 .

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est p $(0 < p < 1)$.

1. Pour $n \geqslant 2$, soit B_n l'évènement «La séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant». Calculer $\mathrm{P}(B_n)$.
   Soit B l'événement «La séquence PP apparaît au moins une fois sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant la première apparition». Calculer $\mathrm{P}(B)$.
2. Pour $n \geqslant 2$, soit A_n l'événement «La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n».
   Calculer $\mathrm{P}(A_n)$. On pourra poser $q = 1 - p$.
   En déduire la probabilité de l'événement C : «La séquence PF n'apparaît jamais».

BROUILLON

$$B_2 = P_1 P_2$$

$$B_3 = F_1 P_2 P_3$$

$$B_4 = F_1 F_2 P_3 P_4$$

$$B_5 = F_1 F_2 F_3 P_4 P_5$$

1. $$P(B_n) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n)$$

$$= P(F_1) \times \cdots \times P(F_{n-2}) \times P(P_{n-1}) \times P(P_n)$$

$$= (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p \times p$$

$$\boxed{P(B_n) = (1-p)^{n-2} \times p^2}$$

B est l'évènement "Au moins un B_n se réalise"

$$B = \bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n$$

On veut donc calculer $P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n\right)$

Les événements de la suite $(B_n)_{n\geq 2}$ sont 2 à 2 incompatibles,

Donc $\sum_{n\geq 2} P(B_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(B_n)$$

somme infinie convergente.

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^{n-2} \times p^2$$

$$= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^{n-2}$$

* voir autre méthode

$$= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n \times (1-p)^{-2}$$

Si $q \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$$

$$= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n$$

$$= \frac{p^2}{(1-p)^2} \times \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)}$$

car $1-p \in]-1,1[$

$$= \frac{p^2}{p} = p.$$

Donc $\boxed{P(B) = p}$

$$(*) \quad = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^{n-2}$$

$$= p^2 \times \sum_{n'=0}^{+\infty} (1-p)^{n'} \qquad n' = n-2$$

$$= p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)} = p.$$

Exercice 9 .

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est p $(0 < p < 1)$.

1. Pour $n \geqslant 2$, soit B_n l'évènement «La séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant». Calculer $\mathrm{P}(B_n)$.
   Soit B l'événement «La séquence PP apparaît au moins une fois sans qu'il n'y ait eu de séquence PF avant la première apparition». Calculer $\mathrm{P}(B)$.
2. Pour $n \geqslant 2$, soit A_n l'événement «La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n».
   Calculer $\mathrm{P}(A_n)$. On pourra poser $q = 1-p$.
   En déduire la probabilité de l'événement C : «La séquence PF n'apparaît jamais».

→ Question très difficile !

$$A_2 = P_1 \cap F_2$$

$$A_3 = (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)$$

$$A_4 = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)$$

$$A_5 = (\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{} \cap \underbrace{P_4}_{} \cap \underbrace{F_5}_{}) \cup (\underbrace{F_1 \cap F_2}_{} \cap \underbrace{P_3 \cap P_4}_{} \cap \underbrace{F_5}_{}) \cup (\underbrace{F_1}_{} \cap \underbrace{P_2 \cap P_3 \cap P_4}_{} \cap \underbrace{F_5}_{})$$
$$\cup (\underbrace{P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4}_{} \cap \underbrace{F_5}_{})$$

" $A_n = \bigcup_{\text{toutes les possibilités}}$ "Que des Faces" $\cap$ "Que des Piles" $\cap F_n$ "

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \left(\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \right)}_{} \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} P_i \right) \cap F_n \right)$$

$\hookrightarrow$ si $k=0$ $\quad \underbrace{\prod_{i=1}^{0} a_i}_{\text{produit de rien}} = 1$

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$$

$$\bigcap_{i=1}^{0} F_i = \Omega$$

$$\bigcup_{i=1}^{0} F_i = \emptyset.$$

$\longrightarrow$ Si $k=0$, $\bigcap_{i=1}^{0} F_i = \Omega$.

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \left(\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} P_i \right) \cap F_n}_{D_{k,n}} \right)$$

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-2} D_{k,n} \right)$$

Or les $D_{k,n}$ sont 2 à 2 incompatibles

Donc $P(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} P_i \right) \cap F_n \right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} q^k \times p^{n-1-(k+1)+1} \times q$$

par indep. des lancers.

$$= \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} \times p^{n-k-1}$$

~~télescopique ?~~

~~binôme ?~~

$\sum x^k$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} q^k \times q \times p^{n-1} \times p^{-k}$$

$$= q \times p^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} q^k \times \frac{1}{p^k}$$

$$= q p^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad \boxed{x \neq 1}$$

• Si $q \neq p$ (si la pièce est déséquilibrée) :

$$P(A_n) = q p^{n-1} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}}$$

$$\boxed{P(A_n) = pq \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}}$$

• Si $q = p$:

$$P(A_n) = p \times p^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-2} 1$$

$$= p^n \times (n-1)$$

$$\boxed{P(A_n) = (n-1)\, p^n}$$

La séquence PF n'apparaît jamais si aucun des A_n ne se réalise.

$$C = \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \cdots$$

$$C = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \overline{A_n}$$

$$P(C) = P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$$

$$P(\overline{C}) = P\left(\overline{\bigcap_{n=2}^{+\infty} \overline{A_n}}\right) = P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\right)$$

Or les A_n sont 2 à 2 incompatibles

Donc $P(\overline{C}) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n)$ et cette série converge bien.

si $p \neq q$: $$P(\overline{C}) = \sum_{n=2}^{+\infty} pq \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}.$$

$$= \frac{pq}{p-q} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(p^{n-1} - q^{n-1}\right)$$

$n = n-1$

$$= \frac{pq}{p-q} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n - q^n$$

$$= \frac{pq}{p-q} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n - \sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right)$$

car $\sum p^n$ et $\sum q^n$ convergent car $p, q \in]-1,1[$.

$$= \frac{pq}{p-q} \times \left(\frac{p}{1-p} - \frac{q}{1-q} \right)$$

$$= \frac{pq}{p-q} \times \frac{p(1-q) - q(1-p)}{(1-p)(1-q)}$$

$$= \frac{pq}{p-q} \times \frac{p-q}{(1-p)(1-q)}$$

$$= \frac{pq}{\underbrace{(1-p)}_{q}\underbrace{(1-q)}_{p}}$$

$q = 1-p$

$p = 1-q$

$$= \frac{pq}{qp}$$

$$= \boxed{1}.$$

- Si $q=p$:

$$P(\overline{C}) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p^n$$

Ressemble à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$n' = n-1$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n \, p^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n \, p^{n-1} \times p^2$$

$p = q = \frac{1}{2}$

$$= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \, p^{n-1} = p^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} = 1.$$

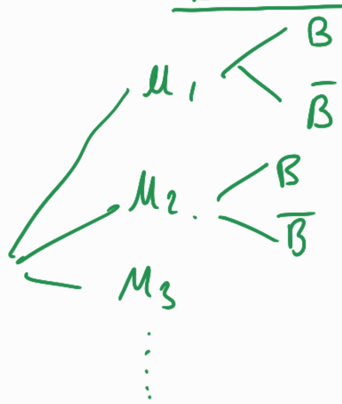
Exercice 10 .

On considère une infinité d'urnes numérotées. La probabilité de choisir l'urne numéro n (avec $n \geq 1$) est égale à $\frac{1}{2^n}$ et l'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

On note U_n l'évènement "On choisit l'urne n"
B " "La boule tirée est blanche".

On cherche $P(B)$

BROUILLON



On choisit une et une seule urne donc un et un seul des évènements U_n se produit de façon certaine.
Donc $(U_n)_{n\geq 1}$ est un s.c.e.

Donc, d'après la formule des probabilités totales, la série $\sum_{n\geq 1} P(U_n \cap B)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n \cap B)$$

somme infinie convergente.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) \times P_{U_n}(B)$$

Donc $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

$$\frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

car $\frac{1}{4} \in]-1,1[$.

$$= \frac{(1/4)^1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1/4}{3/4}$$

$$= 1/3.$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{3}}$$