Exercice 2 .

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = a \times 3^{-k}$.

1. Déterminer a.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Calculer la probabilité de que X soit égale à un multiple de 3.
4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
5. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
6. En déduire que X admet une variance et la calculer.

⚠ Ici $X(\Omega)$ est infini mais dénombrable :

$$X(\Omega) = \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}}^{\text{On peut les compter}}.$$

X est une Variable Aléatoire discrète non finie.

1. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

Or, sous réserve de convergence, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} a \times 3^{-k}$$

$3^{-k} = \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

$$= a \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.

$$= a \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= a \times \frac{1/3}{2/3} = a \times \frac{1}{2}.$$

Donc on doit avoir $a \times \frac{1}{2} = 1$

$\iff a = 2$

D'où $\boxed{a = 2}$

2. Calculons $P(A)$ où A : " X est paire ".

$$P(X \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$$

On sait que la serie $\sum_{k \geq 1} P(X=2k)$ converge car

X est une v.a. discrète.

$$\boxed{P(X=k) = 2 \times \frac{1}{3^k}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \times \frac{1}{3^{2k}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= 2 \times \frac{1/9}{1 - 1/9}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(X \text{ est pair}) = \frac{1}{4}}$$

$$P(X \text{ est impair}) = \frac{3}{4}$$

On pouvait le calculer aussi :

$$P(X \text{ est impair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \times \frac{1}{3^{2k+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - 1/9}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}.$$

3. $$P(X \text{ est un multiple de } 3) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 3k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \times \frac{1}{3^{3k}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{27}\right)^k$$

$$= 2 \times \frac{1/27}{1 - 1/27} = \frac{1}{13}$$

4. Montrons que $\sum_{k\geq 1} k P(X=k)$ converge.

$$\sum_{k=1}^{N} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} k \times 2 \times \frac{1}{3^k}$$

$$= 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{N} k \times \left(\frac{1}{3}\right)^k}_{\text{Converge quand } N \to +\infty ?}$$

Ressemble à $\sum k x^{k-1}$

$$= 2 \sum_{k=1}^{N} k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{N} k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Or $\sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-1/3)^2}$

(série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$).

Donc X admet une espérance.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{3}{2}}$

5.

1	2	3	4
$1/6$	$1/3$	$1/12$	$1/12$

$$E(X) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{4} k\,P(X=k)$$

$$E(X^2) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{4} k^2\,P(X=k)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{4} k(k-1)\,P(X=k)$$

$$E(2^X) = \sum_{k=1}^{4} 2^k\,P(X=k)$$

$$E(\ln X) = \sum_{k=1}^{4} \ln k\,P(X=k)$$

Théorème du transfert

$$E(f(X)) = \sum_{k\in X(\Omega)} f(k)\,P(X=k)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,P(X=k)$$

Si cette somme converge.

$$\sum_{k=1}^{N} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\times 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Ressemble à $\displaystyle\sum_{\substack{k=2\\ \uparrow\\ \text{ou } 1 \text{ ou } 0}}^{+\infty} k(k-1)\,x^{k-2} \underset{x\in]-1,1[}{=} \frac{2}{(1-x)^3}$.

$$= 2\sum_{k=1}^{N} k(k-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2}{9} \times \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

On $\sum_{k\geq 1} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ converge car c'est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.

Et $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

$$= \frac{2}{2^3} \times 3^3$$

$$= \frac{27}{4}.$$

Donc $X(X-1)$ admet une espérance qui vaut :

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{2}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{3}{2}.$$

6. Montrons que $\underbrace{E(X^2)}_{\text{moment d'ordre } 2}$ existe.

$$X^2 = X(X-1) + X$$

Or $X(X-1)$ et X admettent une espérance.

Donc X^2 aussi

et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}.$$

$$= 3.$$

Donc X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{12}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{3}{4}}$$