Exercice 3 .

Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives n°1, 2, … , n, …

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur n° n est égale à $\frac{1}{n}$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. X prend la valeur 0 si le sauteur réussi indéfiniment tous les sauts.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

   Interpréter ce résultat.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. (****) Montrer que X admet une variance et la calculer.

1. On note S_n l'évènement "le sauteur réussi le saut n".

$P(X=1) = P(S_1 \cap \overline{S_2})$

$P(X=2) = P(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3})$

$P(X=3) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \overline{S_4})$

etc…

Donc $P(X=n) =$

(À compléter)

2. $\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \dots$ À compléter puis calculer puis faire tendre N vers $+\infty$.

3. $\sum_{k=0}^{N} k\,P(X=k) = \dots$ À compléter puis calculer puis faire tendre N vers $+\infty$.