Exercice 4:

Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$.
   c) Montrer que X admet une variance et la calculer.
2. a) Déterminer $Y(\Omega)$, puis pour tout $k \geq 2$, calculer $P(Y = k)$.
   b) En déduire la loi de Y.

1. a. Notons B_n (resp. V_n) l'événement "obtenir une boule blanche (resp. verte) au n-ième tirage".

Le 1er changement de couleur ne peut avoir lieu qu'à partir du 2ème tirage. Donc X peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5, ...

$X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

$P(X=2) = P\big((V_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap V_2)\big)$

$P(X=3) = P\big((V_1 \cap V_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap V_3)\big)$

...

$P(X=n) =$ À compléter puis à calculer.

2. a. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (pourquoi ?)

- Si $k \geq 2$, on n'aura k blanches que si on a ce tirage :

$$B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap V_{k+1}$$

Donc $P(Y=k) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap V_{k+1}) = \ldots$ à compléter !