Exercice 3 .

Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives n°$1, 2, \dots, n, \dots$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur n° n est égale à $\frac{1}{n}$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. X prend la valeur 0 si le sauteur réussi indéfiniment tous les sauts.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

Interpréter ce résultat.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. (****) Montrer que X admet une variance et la calculer.

1. On note S_n l'événement "le sauteur réussi le saut n".

$$P(X=1) = P(S_1 \cap \overline{S_2})$$
$$P(X=2) = P(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3})$$
$$P(X=3) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \overline{S_4})$$

etc...

Donc $P(X=n) = P(S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}})$

$$= P(S_1) \times P_{S_1}(S_2) \times \dots \times P_{S_1 \cap \dots \cap S_{n-1}}(S_n) \times P_{S_1 \cap \dots \cap S_n}(\overline{S_{n+1}})$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}}$

2. Calculons $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1.$$

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1}$

On en déduit que $P(X=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 0.$

Donc l'évènement $X=0$ est presque impossible.

Donc il est presque certain que le sauteur finira par échouer.

3. X admet une espérance si $\sum k P(X=k)$ converge absolument.

(Rappel : $\sum u_n$ CVG absolument si $\sum |u_n|$ CVG.)

X admet une espérance si $\sum_{k \geq 0} |k P(X=k)|$ converge

Or ici $\sum_{k \geq 0} |k P(X=k)| = \sum_{k \geq 0} k P(X=k)$.

$$\sum_{k=0}^{N} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}$$

Ressemble à : $\sum \frac{x^k}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - 1\right) + \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{k!} - 1 - 1.$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{k!} - 1.$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{k!} = e$

Donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} k P(X=k) = e - e + e - 1 = e - 1.$

Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = e - 1}$