Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. a. Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ \mathbf{P}(N=n) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

b. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
function N = simuleN()
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < ......
        b = b+1
    end
    N = ......
endfunction
```

1. a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$P(N=2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$$

⚠ variable aléatoire

$$P(N=3) = P(B_1 \cap R_2) = \dots$$

$$P(N=n) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1})$$

$$= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} B_i\right) \cap R_{n-1}\right)$$

Pour $n \geq 3$,

$$P(N=n) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1})$$

$$= P(B_1) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1})$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-2}}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)n}.$$

On remarque que pour $n=2$, $\frac{1}{(n-1)\times n} = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} = P(N=2)$

Donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ P(N=n) = \frac{1}{n(n-1)}}$

b. N admet une espérance ssi $\sum_{n\geq 2} n P(N=n)$ converge absolument.

Or $\forall n \geq 2$, $|n P(N=n)| = n P(N=n)$

Donc N admet une espérance ssi $\sum_{n\geq 2} n P(N=n)$ converge.

Or $\forall n\geq 2$, $n P(N=n) = n \times \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1}$.

$\left(\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n-1} \text{ converge ?} \right)$

Or $\dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$

- $\dfrac{1}{n} \geq 0$ et $\dfrac{1}{n-1} \geq 0$ (pour $n \geq 2$)
- $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$).

Donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs,

$\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n-1}$ diverge.

Donc $\boxed{N \text{ n'admet pas d'espérance}}$

```
function N=simuleN()
    b=1
    while rand()<b/(b+1)
        b=b+1
    end
    N= b+1.
end function
```

tire une bleue

```
>> simuleN()
```

Simule les tirages jusqu'à tirer une rouge