Exercice 4:

Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$.
   c) Montrer que X admet une variance et la calculer.
2. a) Déterminer $Y(\Omega)$, puis pour tout $k \geq 2$, calculer $P(Y = k)$.
   b) En déduire la loi de Y.

1. a. Notons B_n (resp. V_n) l'événement "obtenir une boule blanche (resp. verte) au n-ième tirage".

Le 1er changement de couleur ne peut avoir lieu qu'à partir du 2ème tirage. Donc X peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5, ...

$X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

$P(X=2) = P\left((V_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap V_2)\right)$

$P(X=3) = P\left((V_1 \cap V_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap V_3)\right)$

...

$P(X=n) = P\left((V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap B_n) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap V_n)\right)$

Or $V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap B_n$ et $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap V_n$ sont incompatibles.

Donc $P(X=n) = P(V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap B_n) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap V_n)$

Par indép. des tirages :

$$P(X=n) = P(V_1) \times \cdots \times P(V_{n-1}) \times P(B_n) + P(B_1) \times \cdots \times P(B_{n-1}) \times P(V_n)$$

$$= v \times \cdots \times v \times b + b \times \cdots \times b \times v$$

$$= v^{n-1} \times b + b^{n-1} v$$

$$\boxed{P(X=n) = v^{n-1}b + b^{n-1}v}$$

b) Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 2} n P(X=n)$ converge absolument.

$\forall n \geqslant 2$, $\left| n P(X=n) \right| = n P(X=n)$

Il suffit donc de montrer que $\sum_{n\geqslant 2} n P(X=n)$ converge.

Pour tout $N \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} n P(X=n) &= \sum_{n=2}^{N} n \left(v^{n-1}b + b^{n-1}v \right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} n v^{n-1} b + \sum_{n=2}^{N} n b^{n-1} v . \\
&= b \underbrace{\sum_{n=2}^{N} n v^{n-1}} + v \underbrace{\sum_{n=2}^{N} n b^{n-1}}
\end{aligned}$$

presque

$$\sum_{n=1}^{N} n x^{n-1}$$

$$= b \left(\sum_{n=1}^{N} n v^{n-1} - 1 \right) + v \left(\sum_{n=1}^{N} n b^{n-1} - 1 \right)$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} n v^{n-1} = \dfrac{1}{(1-v)^2}$ car $v \in]-1,1[$.

et $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} n b^{n-1} = \dfrac{1}{(1-b)^2}$ car $b \in]-1,1[$.

D'où $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=2}^{N} n P(X=n) = b\left(\dfrac{1}{(1-v)^2} - 1\right) + v\left(\dfrac{1}{(1-b)^2} - 1\right)$

Donc X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = b\left(\frac{1}{(1-v)^2} - 1\right) + v\left(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\right)$$

$b+v=1$

$v=1-b$

$b=1-v.$

$$= b\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) + v\left(\frac{1}{v^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{b} - b + \frac{1}{v} - v$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - (b+v)$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1}$$

1c) X admet une variance ssi $E(X^2)$ existe.

$$\sum_{n=2}^{N} n^2 P(X=n) = \sum_{n=2}^{N} n^2 \left(v^{n-1} b + b^{n-1} v \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{N} n^2 v^{n-1} b + \sum_{n=2}^{N} n^2 b^{n-1} v.$$

$$= b \sum_{n=2}^{N} n^2 v^{n-1} + v \sum_{n=2}^{N} n^2 b^{n-1}.$$

Calculons $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} n^2 x^{n-1}$ avec $x \in]0,1[$.

$$\sum_{n=2}^{N} n^2 x^{n-1} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=2}^{N} \left(n(n-1) + n \right) x^{n-1}$$

$n^2 = n(n-1) + n$

$$= \sum_{n=2}^{N} n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n=2}^{N} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=2}^{N} n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} - 1.$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} x \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

D'où $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} n^2 x^{n-1} = \dfrac{2x}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1.$

D'où

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} n^2 P[X=n] = b\left(\frac{2v}{(1-v)^3} + \frac{1}{(1-v)^2} - 1\right) + v\left(\frac{2b}{(1-b)^3} + \frac{1}{(1-b)^2} - 1\right)$$

$$= b\left(\frac{2v}{b^3} + \frac{1}{b^2} - 1\right) + v\left(\frac{2b}{v^3} + \frac{1}{v^2} - 1\right)$$

$$= \frac{2v}{b^2} + \frac{1}{b} - b + \frac{2b}{v^2} + \frac{1}{v} - v$$

$$= \frac{2v}{b^2} + \frac{2b}{v^2} + \overbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{v} - 1}^{E(X)}.$$

Donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = \frac{2v}{b^2} + \frac{2b}{v^2} + E(X)$

Donc X admet une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{2v}{b^2} + \frac{2b}{v^2} + E(X) - E(X)^2$$

$$= \dots$$

2.a . $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (pourquoi ?)

- Si $k \geq 2$, on n'aura k blanches que si on a ce tirage :

$$B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap V_{k+1}$$

Donc $P(Y=k) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap V_{k+1})$!

$$= b^k v$$

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad P(Y=k) = b^k v}$$

b) Il reste à déterminer $P(Y=1)$

$$P(Y=1) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} P(Y=k)$$

$$= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} b^k v$$

$$= 1 - v \sum_{k=2}^{+\infty} b^k$$

car $|b| < 1$.

$$= 1 - v \times \frac{b^2}{\underbrace{1-b}_{v}}$$

$$= 1 - b^2$$

$$\boxed{P(Y=1) = 1 - b^2}$$