Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
   (b) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$.
   (c) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (d) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.
   (e) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.
   (b) Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\,v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. a. $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$ car $x \geq 0$.
Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^n = -\infty$.

D'où :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	1 $\searrow$	$-\infty$

$f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ et f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$

Or $0 \in]-\infty, 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$.

b) $f_n(0) = 1$

$f_n(u_n) = 0$ (par définition de u_n)

$f_n(1) = 1 - 1 - 1^n = -1$

Donc $f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$

D'où, par stricte décroissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{0 < u_n < 1}$$

(c) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.

c) $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1}$

Or $f_n(u_n) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - u_n - u_n^n = 0$

$\Leftrightarrow 1 - u_n = u_n^n$

Donc $f_{n+1}(u_n) = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$

Or $u_n \in]0,1[$, donc $f_{n+1}(u_n) > 0$

On a $f_{n+1}(u_n) > 0$ Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

Donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ par stricte décroissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}_+$

D'où $u_n < u_{n+1}$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

(d) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.

(u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 < u_n < 1$

Donc $\quad 0 \leq \ell \leq 1$

(e) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 1$.

On a donc $\ell < 1$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 - u_n = u_n^n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u_n = 1 - \ell \neq 0$ car $\ell \neq 1$.

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln(u_n)} = 0$

car $n \ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

car $\ell > 0$ (u_1 est solution de $1 - x - x = 0$ donc $a_1 = 1/2$

et (u_n) est $\nearrow$ donc $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 1/2$

donc $\ell \geq 1/2$).

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln \ell < 0$ car $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n \ln(u_n) = -\infty$.

(u_n) est une suite qui croît vers $\ell < 1$.

Donc $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \ell < 1$.

Donc $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n^n \leq \ell^n$

Or $\ell^n \longrightarrow 0$ car $\ell \in [0,1[$.

Donc, par encadrement, $u_n^n \longrightarrow 0$. Absurde !

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.

- On sait que $\forall n \geq 1$, $u_n \in]0,1[$. Donc $1 - u_n > 0$.

- $$\begin{aligned} \ln(v_n) &= \ln(1-u_n) \\ &= \ln(u_n^n) \qquad 1-u_n = u_n^n \\ &= n \ln(u_n) \\ &= n \ln(1 + u_n - 1) \qquad u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \\ &\underset{+\infty}{\sim} n(u_n - 1) \\ &\underset{+\infty}{\sim} n(-v_n) = -n v_n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n v_n}$

(b) Etablir que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(b) $\ln(v_n) \sim -n v_n$ donc $\frac{\ln(v_n)}{-n v_n} \longrightarrow 1$

donc $\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right) \longrightarrow 0$

Or $v_n = 1 - u_n \longrightarrow 0$ donc $\ln(v_n) \longrightarrow -\infty$.

donc $-\ln(v_n) \longrightarrow +\infty$

Donc, par quotient, $\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} \longrightarrow 0$

Or $\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln v_n) - \ln(n v_n)}{-\ln(v_n)}$

$$= \frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} + \frac{-\ln(n v_n)}{-\ln(v_n)}$$

$$= \frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} + \frac{\ln n}{\ln v_n} + \frac{\ln v_n}{\ln(v_n)}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} \underset{X=-\ln v_n}{=\!=} \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

Donc $\frac{\ln n}{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \iff \frac{-\ln n}{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\iff \boxed{-\ln n \sim \ln v_n}$

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

On a $\ln v_n \sim -n v_n$

et $\ln v_n \sim -\ln n$

Donc $-n v_n \sim -\ln n$

$a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n}$.

Donc $v_n \sim \frac{-\ln n}{-n}$

$\Longleftrightarrow \boxed{v_n \sim \frac{\ln n}{n}}$