Chapitre 21

Variables aléatoires Discrètes

Table des matières

1 Généralités sur les variables aléatoires

1.1 définition

Définition 1. (Variable aléatoire)
Une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.
Autrement dit l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ est un évènement et donc il a une probabilité.
Nous avons déjà vu que cet évènement se note $\Big(X \leq x\Big)$ ou $\Big\{X \leq x\Big\}$ ou $[X \leq x]$. On notera $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X que l'on appellera support de X.

1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Définition 2. (Fonction de répartition)
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction réelle F_X **définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$** par

$$\boxed{F_X(t) = P(X \leq t)}$$

Proposition 1. (Propriétés élémentaires de la fonction de répartition) (*Voir la preuve*)
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition.

1. $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) \in [0, 1]$
2. F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
4. F_X est continue à droite en tout réel t.

Proposition 2. (Traduction de $P(X \leq b)$, $P(X > a)$ et $P(a < X \leq b)$ avec F_X)
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition.

1. $\forall b \in \mathbb{R}, P(X \leq b) = F_X(b)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X > a) = 1 - F_X(a)$
3. $\forall a < b,\ P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2 Variable aléatoire discrète

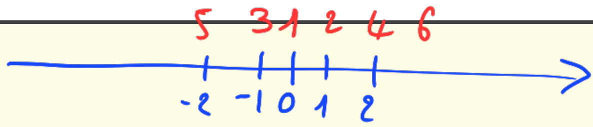
2.1 Définition et exemple

La notion de variable aléatoire discrète est basée sur celle d'ensemble infini dénombrable.

Définition 3. (Ensemble dénombrable)

Un ensemble E est dit *infini dénombrable* si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers E. Autrement dit, si E est infini qu'on peut numéroter les éléments de E.

Exemple 1.



Z

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, Z et $\mathbb{N}^2$ sont infinis dénombrables.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ et $[0, 1]$ sont infinis non dénombrables.

Définition 4. (variable aléatoire discrète)

On dit que X est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Définition 5. (Loi d'une variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples $\big(k, P(X = k)\big)$ tels que $k \in X(\Omega)$.

Exercice de cours 1. On effectue une infinité de lancer de dé et on note X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier 1. On considère que $X = 0$ si on obtient pas de 1. Déterminer la loi de X.

Proposition 3. (Propriétés élémentaires de la loi d'une variable aléatoire.)
Soit X une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs sur $\mathbb{N}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) \in [0, 1]$.
2. $\sum_{k \geq 0} P(X = k)$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Proposition 4. (Caractérisation d'une loi de variable aléatoire.) (admis)
Une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité si

1. $\forall k \in I$, $p_k \geq 0$
2. $\sum_{k \geq 0} P(X = k)$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Exercice de cours 2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{3^{k-2}c}{(k+1)!}$. Déterminer c.

2.2 sce associé à une variable aléatoire discrète.

Proposition 5. (s.c.e. associé à une variable aléatoire discrète.)
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, la famille d'événements $\{[X = k], k \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements. On l'appelle s.c.e. associé à X.

Proposition 6. ("Découpage" d'un évènement par un s.c.e associé à une v.a.)
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et A un évènement.
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A \cap (X = n))$ converge et :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap (X = n)).$$

2.3 Image d'une variable aléatoire discrète par une fonction.

La proposition ci-dessous vous dit que si X est un variable aléatoire discrète, alors X^2 aussi, de même que $X+1$, $X^2 + 2X - 3$, $\dfrac{1}{X}$ (si X ne s'annule pas), etc. Bref pour tout fonction réelle f, $f(X)$ est aussi une variable aléatoire discrète.

Proposition 7. (Image d'une variable aléatoire discrète par une fonction.)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω et $Y(\Omega) = \{f(k), k \in X(\Omega)\}$.

La proposition ci-dessous vous dit que si X est un variable aléatoire, la loi de $f(X)$ se déduit de celle de X.
Par exemple, si $X(\Omega) = \mathbb{R}$, $P(X^2 = 4) = \sum_{x\in\mathbb{R}, x^2=4} P(X = x) \ = P(X = 2) + P(X = -2)$
mais si $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, $P(X^2 = 4) = \sum_{x\in\mathbb{R}^+, x^2=4} P(X = x) \ = P(X = 2)$.

Proposition 8. (Loi de $f(X)$)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega), f(x)=y} P(X = x)$$

Exercice de cours 3. Fonction de répartition de X^2 et $f(X)$ lorsque f est une bijection croissante sur $\mathbb{R}$
Soit X une variable aléatoire,

1. Exprimer F_{X^2} en fonction de F_X.
2. Si f une bijection croissante sur $\mathbb{R}$, exprimer $F_{f(X)}$ en fonction de f_X et de f^{-1}.

2.4 Lien entre la fonction de répartition et la loi d'une vad

Dans cette partie, on utilise l'abréviation "vad" pour "variable aléatoire discrète".

Proposition 9. (De la fonction de répartition d'une vad à sa loi)
Soit X une vad (variable aléatoire discrète) à valeur dans $\mathbb{N}$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

Proposition 10. (De la loi d'une vad à sa fonction de répartition)
Soit X une vad (variable aléatoire discrète) **à valeur dans** $\mathbb{N}$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)$$

3 Moments (Espérance et Variance)

3.1 Espérance

Définition 6. (Espérance)
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
On dit que X admet une espérance si la série $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ converge **absolument**. Dans ce cas on appelle espérance de X sa somme : $E(X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ (qui est la somme de la série lorsque $X(\Omega)$ est infini).

On découvre donc **qu'une variable aléatoire peut ne pas avoir d'espérance !** si la série $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ ne converge pas. Donc pour une variable aléatoire discrète non finie X, avant de calculer son espérance, on s'assure en général que cette espérance existe.

En pratique : ce que vous devez retenir absolument !

- Si $X(\Omega)$ est fini, X admet toujours une espérance qui vaut donc : $E(X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, X admet une espérance si est seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 0} kP(X=k)$ converge. Dans ce cas, on a : $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$.
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, X admet une espérance si est seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 1} kP(X=k)$ converge. Dans ce cas, on a : $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, X admet une espérance si est seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 2} kP(X=k)$ converge. Dans ce cas, on a : $E(X) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} kP(X=k)$
- etc.

Proposition 11. (Linéarité de l'espérance)
Soit X et Y des variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance et a et b deux réels. Alors $aX+b$ et $X+Y$ admettent une espérance et on a :

1. $E(aX+b) = aE(X)+b$
2. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

aX+bY admet une espérance
$E(aX+bY) = a\,E(X) + bE(Y)$.

Proposition 12. (Théorème de transfert)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire, si la série $\sum_{k\geq 0} f(k)P(X=k)$ converge alors la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance et

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)P(X=k).$$

3.2 Variance

Définition 7. (Moment d'ordre 2, variance, écart-type.)
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on appelle :

- Moment d'ordre 2 de X le nombre $E(X^2)$.
- Variance de X le nombre $V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$.
- Écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 13. (Critère pour déterminer si une vad admet une variance) (admis)
X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{k\in X(\Omega)} k^2 P(X=k)$ converge.

En pratique : ce que vous devez retenir absolument !

- Si $X(\Omega)$ est fini, X admet toujours une variance.
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, X admet une variance si est seulement si la série $\sum_{k\geq 0} k^2 P(X=k)$ converge.
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, X admet une variance si est seulement si la série $\sum_{k\geq 1} k^2 P(X=k)$ converge.
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, X admet une variance si est seulement si la série $\sum_{k\geq 2} k^2 P(X=k)$ converge.
- etc.

Proposition 14. (Formule de Koenig-Huygens) (admis)
Si X admet une variance alors elle admet une espérance et on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

La première partie de cette proposition est importante ! Elle a pour conséquence que **si une variable aléatoire n'admet pas d'espérance, elle n'admet pas de variance.**
Mais **une v.a. peut admettre une espérance et ne pas admettre de variance.**

Point méthode : pour répondre à la question "X admet-elle une variance ? Si oui la calculer".
Lorsque X admet une espérance (sinon la réponse est non), étudier si X admet un moment d'ordre 2, et le cas échéant utiliser la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ pour la calculer.
En général, pour montrer que le moment d'ordre 2 existe, on étudiera directement la série associée à $E(X^2)$ mais dans certains cas il sera plus judicieux de montrer que $X(X-1)$ admet une espérance (à l'aide de la formule de transfert). Puis de conclure à l'aide de la linéarité puisque en cas de convergence, $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$.

Proposition 15. (Deux dernières petites choses sur la variance.)
Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

1. Si $\mathrm{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.
2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.

4 Lois usuelles

4.1 Loi géométrique

$\mathcal{G}(p)$

Il faut connaître PAR CŒUR cette loi, son espérance et sa variance ! !

Définition 8. (Loi géométrique)
Soit $p \in [0, 1]$, on dit que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.
En conséquence, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X = 0) = 0$.

La proposition ci-dessous vous montre quand est-ce que la loi géométrique est utilisée : c'est loi du rang d'apparition du premier succès lors de la répétition d'une infinité d'épreuves identiques et indépendantes (ou de la répétition jusqu'au premier succès, ce qui revient au même).

Proposition 16. (La loi géométrique est la loi du rang du premier succès) (admis)
Si on effectue **une infinité d'épreuves identiques et indépendantes** où chaque épreuve a deux issues :

- Le succès, avec la probabilité p
- L'échec, avec le probabilité $1 - p$

ou autant d'épreuves qu'il faut pour obtenir le 1er succès.

et si on note X la variable aléatoire égale au **rang d'apparition du premier succès**, c'est-à-dire au nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention du premier succès.
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

Attention : La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès lors de la répétition d'une **infinité** d'épreuves **identiques et indépendantes**. Nous avons déjà rencontré des expérience ou le nombre de lancers maximal était fixé à l'avance. Par exemple : on lance 10 fois un dé, on note X le rang d'apparition du premier 6, X prend la valeur 0 si on n'obtient aucun 6. Dans ce cas, X ne suit pas la loi géométrique ci-dessus puisque déjà on n'a pas $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$ (on a $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ (mais elle suit une loi très proche, appelée loi géométrique tronquée).

Dans l'exemple 1 vu au début de ce chapitre, la variable aléatoire X comptant le rang du premier 1 obtenu lors d'une infinité de lancers de dé suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

Proposition 17. (Espérance et Variance d'une loi géométrique) (*Voir la preuve*)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple : On tire des boules successivement et avec remise dans une urne qui contient 3 Blanches et 7 Noires jusqu'à obtenir une blanche.

$X =$ " rang d'apparition de la boule blanche ".

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ si on considère que la boule blanche apparaît de façon certaine.

(Sinon, il faut avoir posé $X = 0$ si la boule blanche n'apparaît jamais.

Dans ce cas $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour $k \geq 1$, $P(X=k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$

indep. des tirages

$$= \frac{7}{10} \times \cdots \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10}$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \times \frac{3}{10}.$$

$$= (1-p)^{k-1} \times p \quad \text{avec } p = \frac{3}{10}.$$

2ème exple : Rang d'apparition du 1er 6 d'un dé équilibré.

$R \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$

4.2 Loi de Poisson

Il faut connaître PAR CŒUR cette loi, son espérance et sa variance ! !

Définition 9. (Loi de Poisson)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que la variable aléatoire X suit ~~une~~ la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. → On vérifie facilement que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$

↳ $\{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$.

Modélisation : Pourquoi introduire cette loi ?
Imaginons que l'on veuille modéliser le nombre X d'accidents de voiture par jour survenus sur une portion de route bien délimitée. Pour simplifier le modèle, on suppose que chaque voiture qui passe a indépendamment des autres, la même probabilité p d'avoir un accident sur cette portion de route.
Hypothèse 1 : si l'on sait de plus qu'il passe exactement 1000 voitures par jour sur cette portion de route, alors la loi de X est toute trouvée : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1000, p)$.
Mais cette hypothèse 1 pose problème : comment imaginer qu'il y ait un nombre fixe par jour de voitures qui passe par cette portion de route ? (semaine/week-end/vacances ...) C'est dans ce cadre là que la loi de Poisson est utilisée, car cette loi ne demande pas de "valeur maximale" (elle peut théoriquement prendre toutes les valeurs). On pourrait toutefois contrargumenter en disant que permettre un nombre infiniment grand de voitures qui passent sur une portion de route, et donc d'accidents n'est pas non plus réaliste.

En fait, même si théoriquement une variable de loi de Poisson prend toutes les valeurs entières, quand ces valeurs entières sont trop grandes, la probabilité de ces valeurs devient extrêmement faible et donc concrètement, elle n'en prend qu'un petit nombre, même si elle peut prendre exceptionnellement une valeur plus grande.

Exemple : $\lambda = 1$.

valeurs prises	0	1	2	3	> 4
probabilité	$1/e \approx 0.37$	$1/e \approx 0.37$	≈ 0.18	≈ 0.06	≈ 0.02

Donc, une variable de Poisson de paramètre 1, prend concrètement moins de 10 valeurs.

Proposition 18. (Espérance et Variance de la loi de Poisson) (*Voir la preuve*)
Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

5 Preuves et solutions

5.1 Preuves

Preuve de la proposition 1

1. Bien se rappeler que F_X est une probabilité.
2. Pour $t \leq y$, on a $\{X \leq t\} \subset \{X \leq y\}$ d'où la croissance.
3. Comme F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet une limite en $-\infty$ et $+\infty$.
De plus $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X(-n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq -n)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq n)$.
Or les suites d'évènements $([X \leq -n])$ et $([X \leq n])$ sont respectivement décroissante et croissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq -n) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leq -n]\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leq n]\right)$.
Or $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leq -n] = \emptyset$ et $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leq n] = [X \in \mathbb{R}] = \Omega$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq -n) = P(\emptyset) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq n) = P(\Omega) = 1$. D'où le résultat demandé.
4. F_X est croissante donc elle admet une limite à gauche et à droite en tout point.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que F_X est continue à droite en t_0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0)$.
On sait que $\lim\limits_{t \to t_0^+} F_X(t)$ existe et que $\lim\limits_{t \to t_0^+} F_X(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} F_X\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(X \leq t_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}\left(X \leq t_0 + \frac{1}{k}\right)\right) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\left(X \leq t_0 + \frac{1}{k}\right)\right) = P\left(X \leq t_0\right) = F_X(t_0)$.

(*retour à la proposition 1*)

Preuve de la proposition 17

Prouvons déjà que X admet une variance en prouvant qu'elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire en prouvant que la série $\sum\limits_{k \geq 0} k^2 P(X = k)$ converge (et au passage on calculera sa somme qui sera donc $E(X^2)$).
Pour cela, nous allons calculer sa somme partielle puis faire tendre n vers $+\infty$.

Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 (1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{k=1}^{n} k^2 (1-p)^{k-1} \quad \text{ça ressemble à la dérivée seconde d'une série géométrique, on va s'y ramener.} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} \left(k(k-1)+k\right)(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-1} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p) \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} = \dfrac{2}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{2}{p^3}$ (somme de la dérivée seconde d'une série géométrique)

et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} = \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{1}{p^2}$ (somme de la dérivée d'une série géométrique)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = p(1-p) \times \dfrac{2}{p^3} + p \times \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2-p}{p^2}$.

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \dfrac{2-p}{p^2}$.

Donc X admet une variance et une espérance.

Calculons son espérance :

Pour tout $n \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n} k(1-p)^{k-1}p = p\sum\limits_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$

Donc $E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} p\sum\limits_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} = p \times \dfrac{1}{(1-(1-p))^2 = \frac{1}{p}}$.

Et enfin, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

(*retour à la proposition 17*)

Preuve de la proposition 18

Prouvons déjà que X admet une variance en prouvant qu'elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire en prouvant que la série $\sum_{k\geq 0} k^2 P(X=k)$ converge (et au passage on calculera sa somme qui sera donc $E(X^2)$).
Pour cela, nous allons calculer sa somme partielle puis faire tendre n vers $+\infty$.

Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} \quad \text{ça ressemble à une série exponentielle. On va s'y ramener}
\end{aligned}$$

On va simplifier le k^2 et le $k!$ par k pour cela on prend soin de ne pas diviser par 0 en enlevant le terme de rang 0 de la somme. Ce rang est de toute façon nul.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1+1) \lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k'+2}}{k'!} + e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k'+1}}{k'!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = e^{\lambda}$ (somme d'une série exponentielle).

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$.

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.
Donc X admet une variance et une espérance.

Calculons son espérance :

Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k'+1}}{k'!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}
\end{aligned}$$

Donc $E(X) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$.

Et enfin, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

(*retour à la proposition 18*)

5.2 Solutions