PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$, la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$ converge.

On pose alors, pour tout x de $[0;+\infty[$: $S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$.

5. a. Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1)=1$.

b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

ND en cours

4. BROUILLON.

$$\left(\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\right.$$

$$\frac{1}{k+3}\sim\frac{1}{k}$$

$$\left.⚠\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\sim\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=0\right)\ \text{FAUX}$$

interdit

$$\sim\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cancel{k}+x-\cancel{k}}{k(k+3)}\quad\frac{x}{k(k+3)}\sim\frac{x}{k^2}$$

$$\sum\frac{x}{k^2}$$

4. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- <u>Si $x > 0$:</u>

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{k+x-k}{k(k+x)}$$

$$= \frac{x}{k(k+x)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} \quad \text{car } k+x \underset{k\to+\infty}{\sim} k.$$

- $\frac{x}{k^2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geqslant 0$

- $\sum_{k \geqslant 1} \frac{x}{k^2}$ converge car $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge

(Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc, par le critère d'équiv. des séries à termes positifs

$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ converge.

- <u>Si $x = 0$:</u>

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = 0.$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ a comme terme général 0, donc elle converge et sa somme vaut 0.

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \ \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \text{ converge}}$$

5 a. $S(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{S(0) = 0}$$

$$S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$\forall N \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme télescopique}}}{=\!=\!=} 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$

Donc $\boxed{S(1) = 1}$

b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$. def en cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1/2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{\substack{k'=2 \\ k' \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k'}$

$$= \sum_{k'=2}^{2n+1} \frac{1}{k'} - \sum_{\substack{k'=2 \\ k' \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k'}$$

$$= \sum_{k'=2}^{2n+1} \frac{1}{k'} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1/2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\left(\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k}\right)$$

$$= 2\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k}\right)$$

$$= 2\left(1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}\right)$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}$

$$= 2 - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right) \quad k=$$

$$= 2 - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right)$$

$$= 2 - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}} .$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1/2}$$