Exercice 11:

Soit un réel $p \in]0,1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ F(n) = 1-(1-p)^n$. Donner la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad F(n) = 1-(1-p)^n$$
$$\iff P(X \leqslant n) = 1-(1-p)^n$$

$F(t) = P(X \leqslant t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

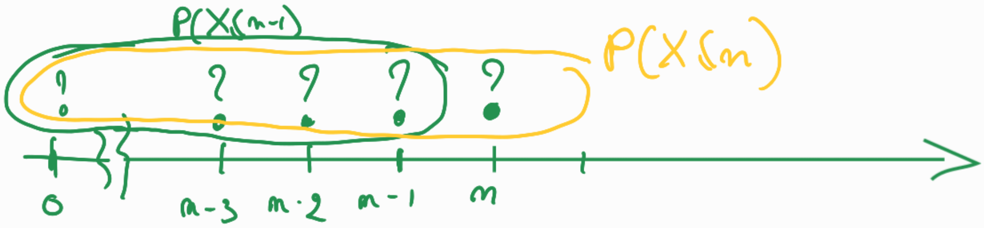
On cherche $P(X=n) = ?$

Exple : dé $\begin{cases} P(X \leqslant 2) = \frac{1}{3} \\ P(X \leqslant 3) = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\to P(X=3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 2)$.

X prenant des valeurs entières, on a :

Valable uniquement si X est à valeurs entières



$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n-1)}$$

À comprendre et à retenir

Si $n \geqslant 1$, $P(X=n) = 1-(1-p)^n - \left(1-(1-p)^{n-1}\right)$
$$= -(1-p)^n + (1-p)^{n-1}$$
$$= (1-p)^{n-1}\left(-(1-p)+1\right)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\quad P(X=n) = (1-p)^{n-1} \times p}$$

On reconnaît la loi $\mathcal{G}(p)$.

D'où $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$ $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$ $\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$