

Exercice de cours 2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{3^{k-2}c}{(k+1)!}$. Déterminer c .

On doit avoir $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

$$\text{Soit } N \geq 0, \quad \sum_{k=0}^N \frac{3^{k-2}c}{(k+1)!} = c \sum_{k=1}^{N+1} \frac{3^{k-2}}{k!}$$

$$= \frac{c}{3^3} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{3^k}{k!}$$

$$= \frac{c}{27} \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{3^k}{k!} - 1 \right)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} = e^3$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{c}{27} (e^3 - 1)$$

$$\text{On a: } \frac{c}{27} (e^3 - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = \frac{27}{e^3 - 1}}$$