Programme de colle n° 24
Semaine du 03/05/2021
Séries - espaces probabilisés infinis - Variables aléatoires discrètes

Pour cette colle, vous serez interrogés comme suit :

1. Première question de cours notée sur 2
2. Deuxième question de cours notée sur 2
3. Un exercice préparé noté sur 8, de niveau 1.
4. Un deuxième exercice, noté sur 8, qui sera soit non préparé, soit préparé de niveau 1 ou 2 selon la réussite de votre premier exercice et votre niveau général.

Table des matières

Questions de cours

Séries

Question de Cours "Séries-001"

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique.

Réponse attendue :
Une série géométrique est de la forme $\sum x^n$. Elle converge si et seulement si $|x| < 1$ (c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$).
Dans ce cas,

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n_0}}{1-x}.$$

Question de Cours "Séries-002"

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique dérivée.

Réponse attendue :
Une série géométrique dérivée est de la forme $\sum nx^{n-1}$. Elle converge si et seulement si $|x| < 1$ (c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$).
Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Question de Cours "Séries-003"

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique dérivée seconde.

Réponse attendue :
Une série géométrique dérivée seconde st de la forme $\sum n(n-1)x^{n-2}$. Elle converge si et seulement si $|x| < 1$ (c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$).
Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Question de Cours "Séries-004"

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série exponentielle. Donner le cas où $x = 1$.

Réponse attendue :
Une série exponentielle est de la forme $\sum \frac{x^k}{k!}$. **Elle converge toujours !**
,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Avec $x = 1$, ça donne l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Question de Cours "Séries-005"

Donner la forme générale et le critère de convergence d'une série de Riemann.

Réponse attendue :
Une série de Riemann est de la forme $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.
,

Question de Cours "Séries-006"

Donner le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

Réponse attendue :
Si $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang) et que $u_n \underset{v\ n}{\sim}$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Question de Cours "Séries-007"

Donner le critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

Réponse attendue :
Si $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang) et que $u_n = o(v_n)$ on a :
si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Question de Cours "Séries-008"

Donner le critère de comparaison des séries à termes positifs.

Réponse attendue :
Si $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang) et que $u_n \leq v_n$ (à partir d'un certain rang) on a :
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Question de Cours "Séries-009"

Donner la définition d'une série absolument convergente et ce qu'on peut en dire. Donner un exemple de série convergente qui n'est pas absolument convergente.

Réponse attendue :
Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.
Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.
Par contre, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Espaces probabilisés infinis

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-001"

Définition : Que signifie qu'une famille (A_n) d'évènements constitue une suite croissante d'évènements ? Une suite décroissante d'évènements ?

Réponse attendue :
(A_n) est une suite croissante d'évènements si A_n implique A_{n+1}, c'est-à-dire que si A_n se réalise alors A_{n+1} aussi.
(A_n) est une suite décroissante d'évènements si A_{n+1} implique A_n, c'est à dire que si A_{n+1} se réalise alors A_n aussi.

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-002"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsque les A_n sont deux à deux incompatibles

Réponse attendue :
Dans ce cas, on sait que la série $\sum P(A_n)$ converge et on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-003"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ avec le théorème de la limite monotone ?

Réponse attendue :
Pour ça, il faut que la suite (A_n) soit une suite *croissante* d'évènements. Et dans ce cas, on peut appliquer le

théorème de la limite monotone, qui donne :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-004"

Comment calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ avec le théorème de la limite monotone ?

Réponse attendue :
Pour ça, il faut que la suite (A_n) soit une suite *décroissante* d'évènements ! Et dans ce cas, on peut appliquer le théorème de la limite monotone, qui donne :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-005"

Écrire la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un évènement A à l'aide d'un s.c.e. infini $(E_n)_{n\geq 1}$.

Réponse attendue :
Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est un s.c.e., alors la série $\sum P(E_n \cap B)$ converge et on a :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n \cap A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) \times P_{E_n}(A).$$

questions plus difficiles :

Question de Cours "EspacesProbasInfinisDiff-001"

Comment calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsqu'on ne peut pas appliquer le théorème de la limite monotone ?

Réponse attendue :
C'est assez rare, mais dans ce cas, on applique l'égalité suivante :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right).$$

et pour calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$, utiliser la formule des probabilités composées (ou l'indépendance des évènements si ils sont indépendants).

Question de Cours "EspacesProbasInfinisDiff-002"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsque on n'est pas dans le cas des questions 002 et 003 ?

Réponse attendue :
C'est le cas le plus difficile et il se présente très rarement ! Mais si ça arrive, voici la méthode : passer la par l'évènement contraire et écrire :

$$1 - P\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$$

puis calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$ en utilisant la formule suivante :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right)$$

et pour calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right)$, utiliser la formule des probabilités composées (ou l'indépendance des évènements si ils sont indépendants).

Variables aléatoires discrètes

Question de Cours "VAD-001"

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Réponse attendue :
C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, notée F_X et définie par :

Pour tout réel t, $F_X(t) = P(X \leq t)$.

Question de Cours "VAD-002"

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et et A un évènement. Écrire la formule des probabilités totales permettant de calculer $P(A)$ "à l'aide de X". L'écrire aussi lorsque A est un évènement de la forme $Y = k$.

Réponse attendue :
La famille d'évènements $(X = n)_{n\geq 0}$ est un s.c.e. Donc, d'après la formule des probabilités totales, la série $\sum P\Big((X = n) \cap A\Big)$ converge et :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\Big((X = n) \cap A\Big).$$

Donc si Y est une autre variable aléatoire et que $k \in Y(\Omega)$, on a :

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\Big((X = n) \cap (Y = k)\Big).$$

Question de Cours "VAD-003"

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est infini dénombrable que doit-on vérifier pour que X admette une espérance et que vaut alors son espérance ?

Réponse attendue :
X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ converge *absolument*, c'est-à-dire si la série $\sum_{k\in X(\Omega)} |kP(X=k)|$ converge.
En pratique, dans les exercices, $kP(X=k)$ est toujours positif et cela revient à vérifier que la série $\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ converge. Dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k).$$

Question de Cours "VAD-004"

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est infini dénombrable que doit-on vérifier pour que X admette une variance et que vaut alors sa variance ?

Réponse attendue :
X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
C'est-à-dire si et seulement si $\sum_{k\in X(\Omega)} k^2P(X=k)$ converge. Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2P(X=k)$$

et

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k).$$

Remarque : on est sûr que $E(X)$ existe car si une variable aléatoire admet une variance, alors elle admet une espérance.

Question de Cours "VAD-005"

Est-ce que le fait d'admettre une espérance implique d'avoir une variance ?

Réponse attendue :
Non ! Une variable aléatoire peut admettre une espérance mais n'avoir pas de variance. Par contre si elle admet une variance, alors elle admet une espérance.

Question de Cours "VAD-006"

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comment vérifie-t-on si les variables X^2, 2^X, $\ln(X)$ ou encore $X(X-1)$ admettent une espérance et comment calcule-t-on cette espérance ?

Réponse attendue :
On applique le théorème du transfert. C'est-à-dire qu'on on vérifie si la série $\sum k^2P(X=k)$, $\sum 2^kP(X=k)$,

$\sum \ln(k)P(X = k)$ ou $\sum k(k-1)P(X = k)$ converge. Et si c'est le cas, on a :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k).$$

$$E(2^X) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k P(X = k).$$

$$E(\ln(k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)P(X = k).$$

$$E(k(k-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X = k).$$

Question de Cours "VAD-007"

Si X et Y admettent une espérance et que a et b sont des rées, que peut-on dire de $aX + bY$?

Réponse attendue :
Dans ce cas, $aX + bY$ admet une espérance et on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Question de Cours "VAD-008"

Si X admet une variance et que a et b sont des rées, que peut-on dire de $aX + b$?

Réponse attendue :
Dans ce cas, $aX + b$ admet une variance et on a $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Question de Cours "VAD-009"

Que signifie le fait que la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p ? Comment le note-t-on ? Quelle est alors sa variance et son espérance ?

Réponse attendue :
Cela signifie que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ou $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors on a aussi $P(X = 0) = 0$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
On a dans les deux cas :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Question de Cours "VAD-010"

Que signifie le fait que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ ? Comment le note-t-on ? Quelle est alors sa variance et son espérance ?

Réponse attendue :

Cela signifie que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
On a alors :

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda.$$

Question de Cours "VAD-011"

Dans quelle situation peut-on affirmer qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p ? Fournir 2 exemples.

Réponse attendue :
Lorsqu'on répète de façon indépendante une expérience jusqu'à l'apparition d'un évènement et que l'on note X le rang d'apparition de cet évènement. Si p est la probabilité de réalisation de cet évènement à chaque répétition alors X suit la loi géométrique de paramètre p.
Par exemple :

- Si on lance un dé équilibré jusqu'à l'apparition d'un 6 et qu'on note X le rang d'apparition du premier 6, alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$
- Si une urne contient 3 Bleues et 7 rouges et qu'on effectue des tirages **avec** remise jusqu'à l'apparition d'une boule bleue et qu'on note Y le rang d'apparition de la première boule bleue alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{7}\right)$
- Si une urne contient 3 Bleues et 7 rouges et qu'on effectue des tirages **avec** remise jusqu'à l'apparition d'une boule bleue et qu'on note Y le rang d'apparition de la première boule bleue alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{7}\right)$

Exercices préparés

Exercices préparés de niveau 1

Exercice 1. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n + \sqrt{n}}{n^2 + 3n + 1}$$

Exercice 2. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3}$$

Exercice 3. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 4. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n$$

Exercice 5. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature et la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Exercice 6. (*correction*)
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(X=k)=a\times 3^{-k}$.

1. Déterminer a.
2. Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire. En déduire la probabilité que X prenne une valeur impaire.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 7. (*correction*)
Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives n° $1,2,3,\ldots,n,\ldots$. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur n° n est égale à $\frac{1}{n}$. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Xprend la valeur 0 si le sauteur réussi indéfiniment tous les sauts.

1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$.
2. Montrer que le sauteur finira presque surement par échouer.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 8. (*correction*)
On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire.
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête presque surement. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Montrer soigneusement :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus(0,1)\,,\quad P(N=n)=\frac{1}{n(n-1)}.$$
2. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?
3. Écrire une fonction Scilab qui renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

Exercice 9. (*correction*)
Soit $p \in]0,1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F(n) = 1 - (1-p)^n.$$

Donner la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

Exercices préparés de niveau 2

Exercice 10. (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 11. Extrait du sujet EML 2021 ! (*correction*)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ converge.
2. On pose pour tout $x \geq 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

Exercice 12. (*correction*)
Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$.
   c) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

Correction de l'exercice 2 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

Correction de l'exercice 3 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

Correction de l'exercice 4 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

Correction de l'exercice 5 (*retour à l'exercice*)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad \text{(somme télescopique)}$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$.

Correction de l'exercice 6 (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 2 FE21 dont la correction est ici.

Correction de l'exercice 7 (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 3 FE21 dont la correction est ici.

Correction de l'exercice 8 (*retour à l'exercice*)
Cet exercice est l'exercice de l'EML ECE 2021 dont la correction est ici.
Notez bien qu'ici on vous demande de redonner tout le programme et pas uniquement de le compléter ! !

Correction de l'exercice 9 (*retour à l'exercice*)
Cet exercice est l'exercice 11 FE 21 dont la correction est ici.
Notez bien qu'ici on vous demande de redonner tout le programme et pas uniquement de le compléter ! !

Correction de l'exercice 10 (*retour à l'exercice*)

Remarque :
Pour cet exercice, on pourrait être tenté d'appliquer la même méthode que pour l'exercice 2.
Mais ici, $n^2 \times \frac{\ln n}{n^2} \not\to 0$. On n'a donc pas $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Que faire ?
$\frac{\ln n}{n^2}$ tend bien vers 0 mais moins vite que $\frac{1}{n^2}$, par contre plus vite que $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et c'est cette idée qu'on va utiliser.

Correction :
$n^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, donc, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs (tous les termes sont bien positifs ici), $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

Correction de l'exercice 11 (*retour à l'exercice*)

1. Si $x = 0$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+0} = 0$ donc le terme général de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est nul donc la série converge et sa somme vaut 0 !

Si $x > 0$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$.

- $\frac{x}{k^2} \geq 0$ et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geq 0$
- $\sum_{k\geq 1} \frac{x}{k^2}$ converge car $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec "$\alpha = 2 > 1$").

Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \text{ converge}}$.

2. On a déjà vu que $\boxed{S(0) = 0}$.

$$\begin{aligned} S(1) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad \text{(somme télescopique)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S(1) = 1}$.

Correction de l'exercice 12 (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 4 FE21 dont la correction est ici.