# Programme de colle n° 24
# Semaine du 03/05/2021
# Séries - espaces probabilisés infinis - Variables aléatoires discrètes

Pour cette colle, vous serez interrogés comme suit :

1. Première question de cours notée sur $2$
2. Deuxième question de cours notée sur $2$
3. Un exercice préparé noté sur $8$, de niveau $1$.
4. Un deuxième exercice, noté sur $8$, qui sera soit non préparé, soit préparé de niveau 1 ou 2 selon la réussite de votre premier exercice et votre niveau général.

## Table des matières



## Questions de cours

### Séries

**Question de Cours "Séries-001"**

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique.

**Question de Cours "Séries-002"**

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique dérivée.

**Question de Cours "Séries-003"**

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série géométrique dérivée seconde.

**Question de Cours "Séries-004"**

Donner la forme générale, le critère de convergence et la somme en cas de convergence d'une série exponentielle. Donner le cas où $x = 1$.

Question de Cours "Séries-005"

Donner la forme générale et le critère de convergence d'une série de Riemann.

Question de Cours "Séries-006"

Donner le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

Question de Cours "Séries-007"

Donner le critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

Question de Cours "Séries-008"

Donner le critère de comparaison des séries à termes positifs.

Question de Cours "Séries-009"

Donner la définition d'une série absolument convergente et ce qu'on peut en dire. Donner un exemple de série convergente qui n'est pas absolument convergente.

## Espaces probabilisés infinis

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-001"

**Définition :** Que signifie qu'une famille $(A_n)$ d'évènements constitue une suite croissante d'évènements ? Une suite décroissante d'évènements ?

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-002"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsque les $A_n$ sont deux à deux incompatibles

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-003"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ avec le théorème de la limite monotone ?

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-004"

Comment calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ avec le théorème de la limite monotone ?

Question de Cours "EspacesProbasInfinis-005"

Écrire la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un évènement $A$ à l'aide d'un s.c.e. infini $(E_n)_{n\geq 1}$.

**questions plus difficiles :**

Question de Cours "EspacesProbasInfinisDiff-001"

Comment calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsqu'on ne peut pas appliquer le théorème de la limite monotone ?

Question de Cours "EspacesProbasInfinisDiff-002"

Comment calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ lorsque on n'est pas dans le cas des questions 002 et 003 ?

## Variables aléatoires discrètes

Question de Cours "VAD-001"

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$.

Question de Cours "VAD-002"

Si $X$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et et $A$ un évènement. Écrire la formule des probabilités totales permettant de calculer $P(A)$ "à l'aide de $X$". L'écrire aussi lorsque $A$ est un évènement de la forme $Y = k$.

Question de Cours "VAD-003"

Si $X$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est infini dénombrable que doit-on vérifier pour que $X$ admette une espérance et que vaut alors son espérance ?

Question de Cours "VAD-004"

Si $X$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est infini dénombrable que doit-on vérifier pour que $X$ admette une variance et que vaut alors sa variance ?

Question de Cours "VAD-005"

Est-ce que le fait d'admettre une espérance implique d'avoir une variance ?

Question de Cours "VAD-006"

Si $X$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comment vérifie-t-on si les variables $X^2$, $2^X$, $\ln(X)$ ou encore $X(X-1)$ admettent une espérance et comment calcule-t-on cette espérance ?

Question de Cours "VAD-007"

Si $X$ et $Y$ admettent une espérance et que $a$ et $b$ sont des rées, que peut-on dire de $aX + bY$ ?

Question de Cours "VAD-008"

Si $X$ admet une variance et que $a$ et $b$ sont des rées, que peut-on dire de $aX+b$ ?

Question de Cours "VAD-009"

Que signifie le fait que la variable aléatoire $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ ? Comment le note-t-on ? Quelle est alors sa variance et son espérance ?

Question de Cours "VAD-010"

Que signifie le fait que la variable aléatoire $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ? Comment le note-t-on ? Quelle est alors sa variance et son espérance ?

Question de Cours "VAD-011"

Dans quelle situation peut-on affirmer qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ ? Fournir 2 exemples.

## Exercices préparés

### Exercices préparés de niveau 1

**Exercice 1.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n + \sqrt{n}}{n^2+3n+1}$$

**Exercice 2.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3}$$

**Exercice 3.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 4.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n$$

**Exercice 5.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature et la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**Exercice 6.** (*correction*)
Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = a \times 3^{-k}$.

1. Déterminer $a$.
2. Calculer la probabilité que $X$ prenne une valeur paire. En déduire la probabilité que $X$ prenne une valeur impaire.
3. Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 7.** (*correction*)
Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives n° $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur n° $n$ est égale à $\frac{1}{n}$. On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. $X$prend la valeur $0$ si le sauteur réussi indéfiniment tous les sauts.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$.
2. Montrer que le sauteur finira presque surement par échouer.
3. Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 8.** (*correction*)
On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire.
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête presque surement. On note $N$ la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Montrer soigneusement :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus (0, 1)\,, \quad P(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}.$$
2. La variable aléatoire $N$ admet-elle une espérance ?
3. Écrire une fonction Scilab qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $N$.

**Exercice 9.** (*correction*)
Soit $p \in ]0, 1[$. On suppose que la fonction de répartition $F$ d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F(n) = 1 - (1 - p)^n.$$

Donner la loi de $X$. En déduire son espérance et sa variance.

### Exercices préparés de niveau 2

**Exercice 10.** (*correction*)
Donner, en justifiant, la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$$

**Exercice 11. Extrait du sujet EML 2021 !** (*correction*)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ converge.
2. On pose pour tout $x \geq 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

**Exercice 12.** (*correction*)
Une urne contient des boules blanches en proportion $b$ et vertes en proportion $v$. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit $X$ la variable égale au nombre de tirages effectués, et $Y$ la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer la loi de $X$.
   b) Montrer que $X$ admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$.
   c) Montrer que $X$ admet une variance et la calculer.

## Correction des exercices

**Correction de l'exercice 1** (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

**Correction de l'exercice 2** (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

**Correction de l'exercice 3** (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

**Correction de l'exercice 4** (*retour à l'exercice*)
Voir la correction du DS08 où cet exercice a été posé.

**Correction de l'exercice 5** (*retour à l'exercice*)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad \text{(somme télescopique)}$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$.

**Correction de l'exercice 6** (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 2 FE21 dont la correction est ici.

**Correction de l'exercice 7** (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 3 FE21 dont la correction est ici.

**Correction de l'exercice 8** (*retour à l'exercice*)
Cet exercice est l'exercice de l'EML ECE 2021 dont la correction est ici.
*Notez bien qu'ici on vous demande de redonner tout le programme et pas uniquement de le compléter ! !*

**Correction de l'exercice 9** (*retour à l'exercice*)
Cet exercice est l'exercice 11 FE 21 dont la correction est ici.
*Notez bien qu'ici on vous demande de redonner tout le programme et pas uniquement de le compléter ! !*

**Correction de l'exercice 10** (*retour à l'exercice*)

***Remarque :***
*Pour cet exercice, on pourrait être tenté d'appliquer la même méthode que pour l'exercice 2.*
*Mais ici, $n^2 \times \frac{\ln n}{n^2} \not\to 0$. On n'a donc pas $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.*
*Que faire ?*
*$\frac{\ln n}{n^2}$ tend bien vers $0$ mais moins vite que $\frac{1}{n^2}$, par contre plus vite que $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et c'est cette idée qu'on va utiliser.*

**Correction :**
$n^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, donc, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs (tous les termes sont bien positifs ici), $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

**Correction de l'exercice 11** (*retour à l'exercice*)

1. Si $x = 0$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+0} = 0$ donc le terme général de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est nul donc la série converge et sa somme vaut $0$ !
   Si $x > 0$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$.
   - $\frac{x}{k^2} \geq 0$ et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geq 0$
   - $\sum_{k\geq 1} \frac{x}{k^2}$ converge car $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec "$\alpha = 2 > 1$").

   Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \text{ converge}}$.

2. On a déjà vu que $\boxed{S(0) = 0}$.

$$\begin{aligned} S(1) &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad \text{(somme télescopique)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S(1) = 1}$.

**Correction de l'exercice 12** (*retour à l'exercice*)
Cet exercice et une version courte de l'exercice 4 FE21 dont la correction est ici.