Chapitre 15

Espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Définition

Définition 1. ($\mathbb{R}$-Espace vectoriel)
Un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel** est un **ensemble** E tel que :

1. Il existe une application notée $+ : E \times E \to E$ appelée **loi de composition interne** qui vérifie les 4 propriétés suivantes :
   (a) $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$ (la loi $+$ est commutative)
   (b) $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (la loi $+$ est associative)
   (c) Il existe un unique élément de E noté $0_E,$ tel que $\forall u \in E, u+0_E = 0_E+u = u$
   (d) Pour tout $u \in E,$ il existe un unique élément de E noté $(-u)$ tel que $u+(-u) = 0_E$
2. une application notée $. : \mathbb{R} \times E \to E$ appelée **loi de composition externe** qui vérifie les 4 propriétés suivante :
   (a) $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in E^2, \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
   (c) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
   (d) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$

Remarque.

- Dans cette définition,on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. On parle alors de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Un espace vectoriel est donc soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Remarque. Les éléments de E sont appelés vecteurs, ceux de $\mathbb{R}$ scalaires, 0_E est appelé *vecteur nul*.
$\lambda \cdot u$ se note en général λu.
$u+(-v)$ se note $u-v$.

Exemple 1. Les cinq familles d'espaces vectoriels de référence.

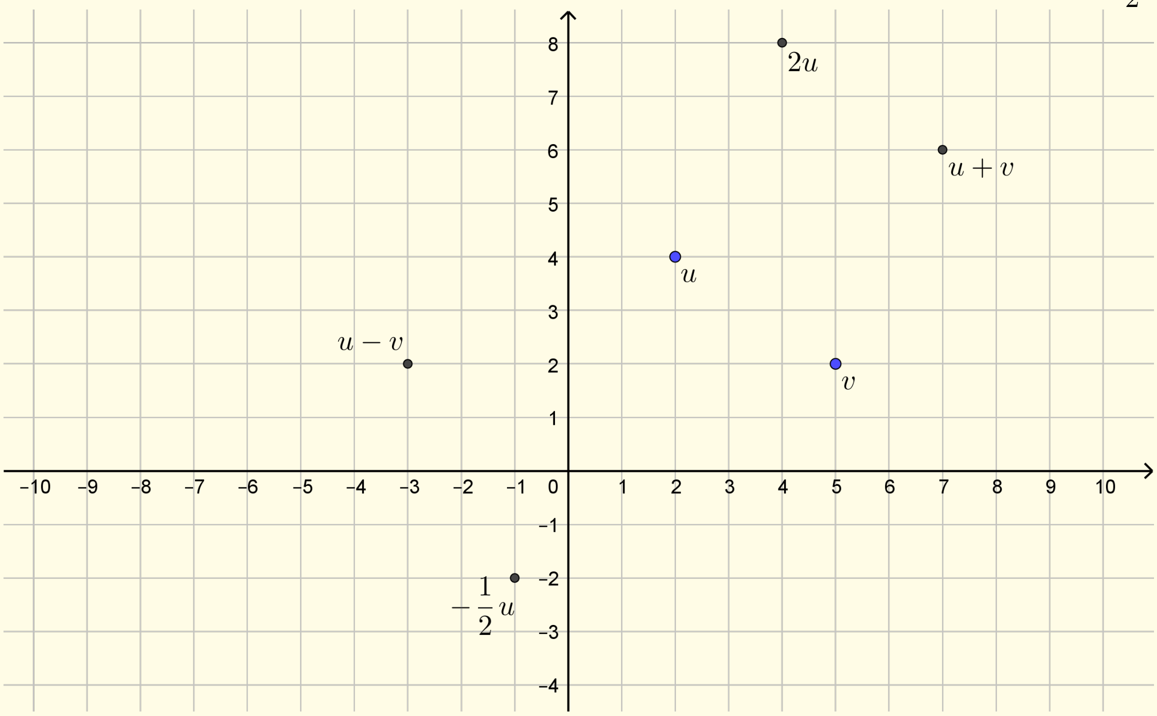
1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour tous entiers $n, p \geq 1$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Pour toute partie D de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions allant de D dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel noté $\mathbb{R}^D$. En particulier :
   - Pour tout intervalle I, $I^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   - $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque. Les exemples 1 à 4 sont également vrais en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

1.1.2 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On a vu que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels.
Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont les couples de réels (x, y). Contrairement à ce qu'on a vu au lycée, **on identifie les points de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et leur coordonnées**. De plus, **on n'écrit plus forcément les vecteurs avec une flèche**.

Exemple 2. Représenter ci-dessous, les vecteurs $u = (2,4)$, $v = (5,2), u+v, u-v, 2u, -\dfrac{1}{2}u$.



De même, les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont les triplets de réels (x, y, z).
On identifie là aussi les points de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et leur coordonnées.

1.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Proposition 1. (Règles de calcul dans un e.v.)
Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, et pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot u = 0_E$.
2. $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.
3. $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u) = -\lambda u$.
4. $\lambda u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

1.2 Sous Espaces Vectoriels

1.2.1 Définition et caractérisations

Définition 2. (Sous-espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si la restriction des lois $+$ et . de E à F fait de F un espace vectoriel.
*On utilise souvent l'abréviation **s.e.v.** (en minuscule).*

Remarque. Généralement, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera que c'est un sous-espace vectoriel.

Remarque. Si F est un s.e.v. de E, alors il doit contenir le vecteur nul 0_E.

Proposition 2. (Caractérisation n° 1 d'un sous-espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \subset E$.
2. $F \neq \emptyset$.
3. $\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda u + \mu v \in F$ (F est stable par combinaison linéaire).

Proposition 3. (Caractérisation n° 2 d'un sous-espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \subset E$.
2. $F \neq \emptyset$.
3. $\forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$.

Méthode à retenir n° 1

Montrer qu'un ensemble F est un sev de E en vérifiant la stabilité par combinaison linéaire.

1. Montrer que $F \subset E$
2. Montrer que $F \neq \emptyset$ en montrant que $0_E \in F$.
3. Considérer deux éléments u et v (les nommer en cohérence avec l'énoncé) de F et deux scalaires λ et μ, et montrer que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque : *Dans le point 3, on peut se contenter de prendre un scalaire λ et montre que $\lambda u + v \in F$.*

Exercice de cours 1. Soit $F = \{(x, x+y, 3x),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 5y + 2z = 0\right\}$. Démontrer que F et G sont des espaces vectoriels.

Exercice de cours 2.
Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} t & s \\ t+s & t-s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{C}\right\}$. Démontrer que F est un espace vectoriel.

Méthode à retenir n° 2

Montrer qu'un ensemble F n'est pas un sev de E.

On peut au choix :

- Montrer que $0_E \notin F$
- Trouver deux éléments u et v de F et deux scalaires λ et μ tels que $\lambda u + \mu v \notin F$.

Exercice de cours 3.
Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y - 4z = 1\right\}$.
Démontrer que F **n'est pas** un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice de cours 4.
Soit $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y = 0\right\}$.
Démontrer que F **n'est pas** un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Exemples de s.e.v.

Exemple 3. Des sous espaces vectoriels classiques (liste non exhaustive).

1. Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.
2. Des s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (sous-espaces vectoriels de suites) :
   (a) L'ensemble des suites réelles bornées est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) L'ensemble des suites réelles convergentes est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (c) L'ensemble des suites constantes à partir d'un certain rang est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. Des s.e.v. de $\mathbb{R}^I$ (sous-espaces vectoriels de fonctions) :
   (a) L'ensemble des fonctions continues sur I est un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$.
   (b) L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$.
   (c) L'ensemble des fonctions bornées sur I est un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$.
   (d) L'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) définies sur $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   (e) Pour tout $T > 0$, l'ensemble des fonctions T-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1.3 Familles génératrices - Sous espace vectoriel engendré par une partie

1.3.1 Combinaison linéaire de n vecteurs.

Définition 3. (Combinaison linéaire de n vecteurs)
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Un vecteur x de E est appelé **combinaison linéaire** de cette famille si il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Exemple 4.
$P(X) = 2X^4 - 3X^2 + X$ est une combinaison linéaire de $(1, X, 4X^2, \pi X^4)$.

Exemple 5.

1. Donner 3 combinaisons linéaires de $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (2, -1, 2)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$.
2. Déterminer la forme générale de toute combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

1.3.2 Sous-espace vectoriel engendré par n vecteurs.

Définition 4. (Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs)
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'un ev E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de cette famille forme un sous-espace vectoriel de E. On le note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
On a donc :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Autrement dit :

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \textbf{ tels que } v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Proposition 4. (Propriétés de "Vect$(u_1, \dots, u_n)$") (admis)

1. $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ contient les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.
2. $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sev contenant $u_1, \dots, u_n$.
   Autrement dit, si G est un sev contenant $u_1, \dots, u_n$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset G$

1.3.3 Famille génératrice d'un s.e.v.

Définition 5. (Famille génératrice d'un espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de E.
On dit que $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Méthode à retenir n^o 3

Montrer qu'un ensemble F est un sev de E en exhibant une famille génératrice.
Cas d'un ensemble défini "par image directe".

1. Prendre un élément u de E.
2. Traduire la propriété $u \in F$ à l'aide de la définition de F.
3. Séparer les scalaires et en extraire la famille génératrice.

Méthode à retenir n^o 4

Montrer qu'un ensemble F est un sev de E en exhibant une famille génératrice.
Cas d'un ensemble défini "implicitement".

1. Prendre un élément u de E (et pas de F) et *écrire sa forme générale*.
2. Traduire la relation $u \in F$ par l'équation (ou les équations) caractérisant F.
3. Transformer cette équation pour exprimer une coordonnée (ou plusieurs s'il y a plusieurs équations) en fonction des autres.
4. Remplacer cette coordonnées dans la définition de u.
5. Séparer les scalaires et en extraire la famille génératrice.

Exercice de cours 5. Soit $F = \{(x, x+y, 3x),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 5y + 2z = 0\right\}$. Démontrer que F et G sont des espaces vectoriels.

Méthode à retenir n° 5

Montrer qu'une famille donnée $u_1, \dots, u_n$ est une famille génératrice d'un ev E.

1. Prendre un élément u de E (et pas de F) et *écrire sa forme générale.*
2. Prendre des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
3. Démontrer que l'équation $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$ admet au moins une solution.

Exercice de cours 6. Montrer que $\big((1,0,1),(1,0,2),(2,1,1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice de cours 7. Montrer que $(X^2-2, X+1, X^2+2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 5. (Sur-famille d'une famille génératrice) (admis)
Toute "sur-famille" d'une famille génératrice est génératrice.

Exemple 6. $(X^2-2, X+1, X^2+2, 3x^2+5X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ car on a vu dans l'exercice précédent que $(X^2-2, X+1, X^2+2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Attention ! Une sous-famille d'une famille génératrice n'est pas forcément génératrice. Néanmoins on peut parfois extraire une sous-famille génératrice à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 6. (Famille génératrice pouvant être réduite)
Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice telle que u_j est combinaison linéaire de $(u_i)_{1\leq i\leq n, i\neq j}$. Alors $(u_i)_{1\leq i\leq n, i\neq j}$ est une famille génératrice.
Autrement dit : si dans une famille génératrice, un vecteur est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en enlevant ce vecteur reste génératrice.

1.3.4 Opérations sur les Vect

Dans plusieurs exercices, il sera utile de bien connaître les opérations que l'on peut faire sur un Vect :

Proposition 7. (Opérations sur les Vect)
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs. On ne change pas $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ si on :

1. enlève le vecteur nul (si la famille $\mathcal{F}$ en contient un !), ou un vecteur redondant, ou un vecteur qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs,
2. permute des vecteurs,
3. multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
4. remplace un vecteur par une combinaison linéaire de ce vecteur et d'autres vecteurs de la famille.

Exercice de cours 8. (*Voir la correction*)
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui a pour famille génératrice $\Big((1,1),(0,0),(1,-1),(2,3)\Big)$.
Montrer que $E = \mathrm{Vect}\Big((1,0),(0,1)\Big)$ autrement dit que $E = \mathbb{R}^2$.

Attention ! Ne pas confondre la famille avec le sous-espace vectoriel engendré par la famille ! Suite aux opérations précédentes, les familles sont modifiées, mais les sous-espaces engendrés par ces familles restent les mêmes. D'où l'égalité sur les $vect$, et non sur les familles directement.

2 Bases

2.1 Famille libre

Définition 6. (Famille libre, famille liée)
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de E. On dit que cette famille est libre si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$$

Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.
Ainsi, une famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée ssi il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$

Définition 7. (Couple de vecteurs colinéaires)
Dire que deux vecteurs u_1 et u_2 sont colinéaires signifie que la famille (u_1, u_2) est liée.

Méthode à retenir n° 6

Démontrer qu'une famille donnée $u_1, \dots, u_n$ est libre

1. Prendre des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2. Vérifier que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice de cours 9. Montrer que $\big((1,2,0),(1,-1,0),(1,0,3)\big)$ est une famille libre.

Exercice de cours 10. Montrer que $(X+3, X+1, X^2-1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque.

- Si $0 \in (u_i)_{1\leq i\leq n}$, alors $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée (une famille contenant le vecteur nul est liée).
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Proposition 8. (Caractérisation d'une famille liée)

Une famille est liée si et seulement si au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Méthode à retenir n° 7

Démontrer qu'une famille donnée $u_1, \ldots, u_n$ est liée

Le plus simple est de trouver un vecteur qui est combinaison linéaire des autres. Si on n'y arrive pas, on peut appliquer la méthode suivante :

1. Prendre des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Vérifier que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$ n'implique pas $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Définition 8. (Famille de polynômes échelonnée en degrés)
Une famille de polynômes est dite échelonnée en degrés, si les degrés des polynômes sont deux à deux distincts.

Proposition 9. (Famille de polynômes échelonnée en degrés)

Dans $\mathbb{K}[X]$, une famille de polynômes échelonnée en degrés est libre.

2.2 Base

2.2.1 Définition

Définition 9. (Base)

Une base d'un espace vectoriel est une famille **libre et génératrice.**

Exemple 7. $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Méthode à retenir n° 8

Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel

Déterminer une famille génératrice comme vu aux méthodes 3 et 4 et vérifier qu'elle est libre.

Méthode à retenir n° 9

Démontrer qu'une famille donnée est une base

Procéder comme dans la méthode 5 et vérifier que l'équation $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = u$ admet **une et une seule** solution.

Exemple 8. On a vu aux exercices que la famille $\big((1,0,1),(1,0,2),(2,1,1)\big)$ est une famille génératrice et libre de $\mathbb{R}^3$]. C'est donc une de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 9. On a vu aux exercices que la famille $(X^2-2, X+1, X^2+2)$ est une famille génératrice et libre de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode à retenir n° 10

Extraire une base d'une famille génératrice non libre.

Enlever des vecteurs en opérant sur le Vect comme vu à la section **1.3.4** jusqu'à obtenir une famille libre.

Exercice de cours 11. On admet que $\big(X, X+1, X+2\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer qu'elle est liée.
2. En extraire une base.

2.2.2 Coordonnées d'une vecteur dans une base

Proposition 10. (Caractérisation d'une base par l'existence et l'unicité de la décomposition)
$(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E si et seulement si $\forall u \in E$, u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(u_i)_{1\leq i\leq n}$.

Définition 10. (Coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, les x_i sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Méthode à retenir n° 11

Déterminer un vecteur dont on donne les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base donnée $(e_1, \dots, e_n)$.

C'est le vecteur $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Méthode à retenir n° 12

Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné u dans une base donnée $(e_1, \dots, e_n)$.

Résoudre l'équation $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = u$.

Exercice de cours 12. On a vu que la famille $(X^2 - 2, X + 1, X^2 + 2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer le polynôme de coordonnées $(-2, 5, 1)$ dans cette base.
2. Déterminer les coordonnée de $1 + X + X^2$ dans cette base.

2.2.3 Bases canoniques des espaces de référence

Définition 11. (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)

C'est la base des $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est à la i-ème position.

Exemple 10. Donner la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Définition 12. (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$)

C'est la famille $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$

Exemple 11.
Donner la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ et donner les coordonnées de $3X^2 - 5X + 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 13. (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

C'est la famille $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefs sont nuls sauf le coef. (i, j) qui vaut 1.

Exemple 12.

Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les coordonnée de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ dans cette base