Chapitre 22

Applications linéaires

Table des matières

Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite, $\mathbb{R} =$ peut être remplacé par $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Application linéaire

Définition 1. (Application linéaire)
Une application f est dite linéaire si elle va d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F et est telle que :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ f(au+bv) = af(u) + bf(v).$$

Remarque.
Cette définition est équivalente à demander les deux conditions suivantes :

1. $\forall u,v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in E, f(au) = af(u)$

Il est donc possible de vérifier ces deux points séparément si cela apporte plus de clarté au raisonnement.

Remarque.
Cette définition est encore équivalente à demander la condition suivante :

$$\forall u,v \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ f(au+v) = af(u) + f(v)$$

On peut donc se contenter de vérifier cette égalité pour prouver qu'une application est linéaire.

Proposition 1. (Applications linéaires de référence.)
Pour toutes les applications ci-dessous, on pourra affirmer qu'elles sont linéaires sans le justifier.

- L'application nulle $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & 0_E \end{array} \right.$ est linéaire.
- L'application "identité de E", id_E : $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array} \right.$ est linéaire.
- L'application dérivation est linéaire.
- L'application transposée $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right.$ est linéaire.
- Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application φ_A : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est linéaire.

Définition 2. (Ensemble des applications linéaire.)

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Écrire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ signifie donc que f est une application linéaire de E dans F.

Proposition 2. (Image du vecteur nul et linéarité sur n vecteurs.)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n, \forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$f(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1f(u_1) + \cdots + a_nf(u_n).$$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

1.2.1 Combinaisons linéaires d'applications linéaires.

Proposition 3. (Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f,g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$.

Proposition 4. ($\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.)
Soient E et F deux espaces vectoriels.

$\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F

1.2.2 Composition d'applications linéaires.

Proposition 5. (Composée de deux applications linéaires)

Soient E,F, G trois espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Autrement dit : *la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Attention ! Comme pour les fonctions réelles, en général,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

1.3 Isomorphismes, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

1.3.1 Isomorphismes

Définition 3. (isomorphisme)
Soient E et F deux espaces vectoriels.

On appelle **isomorphisme de E sur F** toute **application linéaire et bijective** de E sur F.

Méthode à retenir n° 1

Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme et déterminer f^{-1}

Attention ! Cette méthode est utile si on veut déterminer f^{-1}. Si on veut seulement prouver que f est un isomorphisme, on appliquera en général la proposition 26.

1. On montre déjà que f est linéaire
2. On montre ensuite que pour tout $v \in F$, l'équation $f(u) = v$ admet une unique solution $u \in E$. Cette solution donne alors l'expression de f^{-1}.

Proposition 6. (Caractérisation d'un isomorphisme)
Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
f est un isomorphisme si et seulement si il existe $g \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Proposition 7. (La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.)
Soient E et F deux espaces vectoriels et f un isomorphisme de E de sur F.
Alors f^{-1} est linéaire et c'est donc un isomorphisme de F sur E.

Proposition 8. (La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.)
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque. On voit qu'il y a une analogie très forte avec le résultat vu sur les matrices (Si A et B sont inversibles, alors AB aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$). On verra plus loin qu'il y a en effet un lien très étroit entre les applications linéaires en dimension finie et les matrices.

1.3.2 Endomorphismes et automorphismes

Définition 4. (endomorphisme)
Soit E un espace vectoriel.

On appelle **endomorphisme de** E tout application linéaire de E dans lui-même.

On note $\mathscr{L}(E)$ (plutôt que $\mathscr{L}(E, E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Définition 5. (automorphisme)
Soit E un espace vectoriel.

On appelle **automorphisme de** E tout endomorphisme de E qui est aussi un isomorphisme.

On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

Proposition 9. (Stabilité de $GL(E)$ par passage à la réciproque et par composition)

Soient $f, g \in \mathrm{GL}(E)$. $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$ et $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.

Autrement dit : *$GL(E)$ est stable par passage à la réciproque et par composition.*

Remarque. On pourra (pour une fois) se passer de retenir la proposition ci-dessus car c'est une conséquence directe des propositions 7 et 8.

1.3.3 Formes linéaires

Définition 6. (forme linéaire)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle forme linéaire sur E tout application linéaire de E sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Cette définition est bien licite car $\mathbb{R}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Attention ! On pensera bien au fait que si E est une $\mathbb{C}$-espace vectoriel une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{C}$.

1.4 Matrice d'une application linéaire en dimension finie.

Définition 7. (Matrice d'une application linéaire dans deux bases.)
soient E et F des espaces vectoriels **de dimension finie** et $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (b_1, \ldots, b_n)$, respectivement une base de E et de F.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ on appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ définie par $(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f))_{i,j} = a_{i,j}$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j}$ représente la i-ème coordonnée de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Proposition 10. (Composition des applications linéaires et produit matriciel)
Soient E ,F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de ces espaces.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. On note M la matrice de f dans les base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et N celle de g dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

La matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est $N \times M$.

Proposition 11. (Caractérisation des isomorphismes)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et M la matrice de f dans des bases de E et de F.

f est un isomorphisme de E sur F si et seulement M est carrée inversible.

Le cas échéant, la matrice de f^{-1} dans ces mêmes bases est M^{-1}.

Proposition 12. (condition nécessaire d'isomorphisme)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Si f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim E = \dim F$.

Attention ! La réciproque est fausse, on peut avoir $\dim E = \dim F$ sans que f ne soit un isomorphisme.

2 Noyau et Image

2.1 Noyau d'un application linéaire

Définition 8. (Noyau d'un application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau de** f l'ensemble noté $\operatorname{Ker} f$ (ou $\operatorname{Ker}(f)$) défini par :

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\}$$

C'est donc l'ensemble des antécédents du vecteur nul 0_F. On a évidemment $\operatorname{Ker} f \subset E$.

Proposition 13. ($\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 14. (Critère d'injectivité d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

Attention ! Cette propriété n'est valable que si f est linéaire !

2.2 Image d'une application linéaire

Définition 9. (Image d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$ ou $\operatorname{Im}(f)$ est l'ensemble :

$$\operatorname{Im} f = \Big\{ f(u) \,|\, u \in E \Big\} = \Big\{ v \in F \,|\, \exists u \in E,\ v = f(u) \Big\}.$$

On a évidemment $\operatorname{Im} f \subset F$.

Remarque.

1. Attention, $\operatorname{Im} f$ ne signifie pas du tout "la partie imaginaire de f" ce qui n'a aucun sens.
2. $\operatorname{Im} f$ est donc l'ensemble des images par f.

Proposition 15. ($\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 16. (Caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Image et noyau en dimension finie.

3.1.1 Image d'une famille génératrice

Définition 10. (Image d'une famille de vecteurs)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

On a appelle image de $\mathcal{F}$ par f la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$

Proposition 17. (Image d'une famille génératrice par une application linéaire.)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Remarque. Dans cette proposition, seul E doit être de de dimension finie, F peut être de dimension infinie.

3.1.2 Image d'une base par une application linéaire

L'image d'une base par une application linéaire nous donne beaucoup d'informations sur cette application.

Proposition 18. (Image d'une base par une application linéaire.)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

L'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Proposition 19. (Image d'une base par une application linéaire.)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit $\mathcal{B}$ **une base de** E**.**

- f est injective si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ est une famille libre de F.
- f est surjective si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F.
- f est un isomorphisme si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ est une base de F.

Méthode à retenir n° 2

Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

1. Prendre une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (en général on prend la base canonique) et calculer $f(e_1),\ f(e_2), \ldots,\ f(e_n)$ qui est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer si $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est libre. Si ce n'est pas le cas, enlever les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres pour obtenir une sous-famille libre.

Proposition 20. (Application linéaire définie par les images d'une base)
Soient E un espace vectoriel et de dimension finie, F un espace vectoriel (quelconque) et $(e_1, \dots, e_n)$ **une base** de E, $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que l'image de $(e_1, \dots, e_n)$ par f soit la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

Autrement dit : *On définit complètement une application linéaire en donnant les images des vecteurs d'une base.*

3.2 Rang d'une application linéaire, théorème du rang.

Définition 11. (Rang d'une application linéaire)
Soient E et F des espaces vectoriels **de dimension finie** et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de l'image de f :

$$\operatorname{rg} f = \dim \Big(\operatorname{Im} f \Big).$$

Proposition 21. (Théorème du rang)
Soient E et F des espaces vectoriels **de dimension finie** et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On a :

$$\dim \Big(\operatorname{Ker}(f) \Big) + \operatorname{rg} f = \dim(E).$$

Autrement dit :

$$\dim \Big(\operatorname{Ker}(f) \Big) + \dim \Big(\operatorname{Im} f \Big) = \dim(E).$$

Proposition 22. (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang.)
On suppose que F est aussi un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E$.
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$.

Proposition 23. (Un hyperplan est toujours le noyau d'une forme linéaire non nulle.)

H est un hyperplan de E si et seulement si $H = \operatorname{Ker} f$ où f est une forme linéaire non nulle.

3.3 Isomorphismes en dimension finie

3.3.1 Espaces vectoriels isomorphes

Définition 12. (Espaces vectoriels isomorphes)

Deux espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Proposition 24. (Espaces vectoriels isomorphes)
Soient E et F des espaces vectoriels **de dimension finie**.

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Proposition 25. (Espaces vectoriels de dimension n et $\mathbb{R}^n$)

Un espace vectoriel de dimension n est toujours isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

3.3.2 Caractérisation des isomorphismes pour des espaces de même dimension

Proposition 26. (Caractérisation des isomorphismes pour des espaces de même dimension)
Soient E et F des espaces vectoriels **de dimension finie tels que** $\dim E = \dim F$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

f est un isomorphisme $\iff$ f est injective $\iff$ f est surjective.

Autrement dit : *pour montrer la surjectivité de f il suffit de montrer son injectivité et réciproquement.*

Remarque. En pratique, il est souvent plus simple de montrer que f est injective.

3.3.3 Caractérisation des automorphismes en dimension finie.

Dans le cas où f est un endomorphisme en dimension finie, les conditions de la proposition 26 sont automatiquement vérifiées et cela donne la proposition suivante :

Proposition 27. (Caractérisation des automorphismes en dimension finie)
Soient E un espace vectoriel **de dimension finie** et f un endomorphisme de E.

f est un automorphisme $\iff$ f est injectif $\iff$ f est surjectif.

Autrement dit : *En dimension finie :*

- *un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si il est injectif.*
- *un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si il est surjectif.*

En général, pour prouver qu'un endomorphisme est un automorphisme (en dimension finie), on cherchera à prouver qu'il est injectif car c'est souvent plus facile à montrer que la surjectivité.

3.4 Rang d'une matrice

Définition 13. (Rang d'une matrice)
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $c_1, \ldots, c_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définies par les colonnes de M dans la base canonique. On appelle rang de M le rang de la famille $(c_1, \ldots, c_p)$.

Exemple 1.
Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 28. (Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée.)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et A sa matrice associée dans des bases fixées de E et F. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$
$A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$

Proposition 29. (Rang et transposée)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$

4 Projecteurs et symétries.

Définition 14. (Projecteurs)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E $(E = F \oplus G)$.
Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple (u_F, u_G) avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$ tels que $u = u_F + u_G$.

On appelle **projecteur (ou projection) sur F parallèlement à G** l'application linéaire p telle que $p(u) = u_F$.
De même on appelle projecteur sur G parallèlement à F l'application q telle que $q(u) = u_G$.
p et q sont appelés projecteurs associés à la somme directe $E = F \oplus G$.

- Voir ici l'illustration dans $\mathbb{R}^2$.

- Voir ici l'illustration dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 30. (Image et noyau d'un projecteur *)**
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors $\mathrm{Im} p = F$ et $\mathrm{Ker}\, p = G$.
En particulier $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im} p$.

Proposition 31. (propriétés des projecteurs.)
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F.

- $p + q = \mathrm{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0$
- $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$

Proposition 32. (Caractérisation des projecteurs *)**
Réciproquement, soit $p \in \mathscr{L}(E)$.

p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

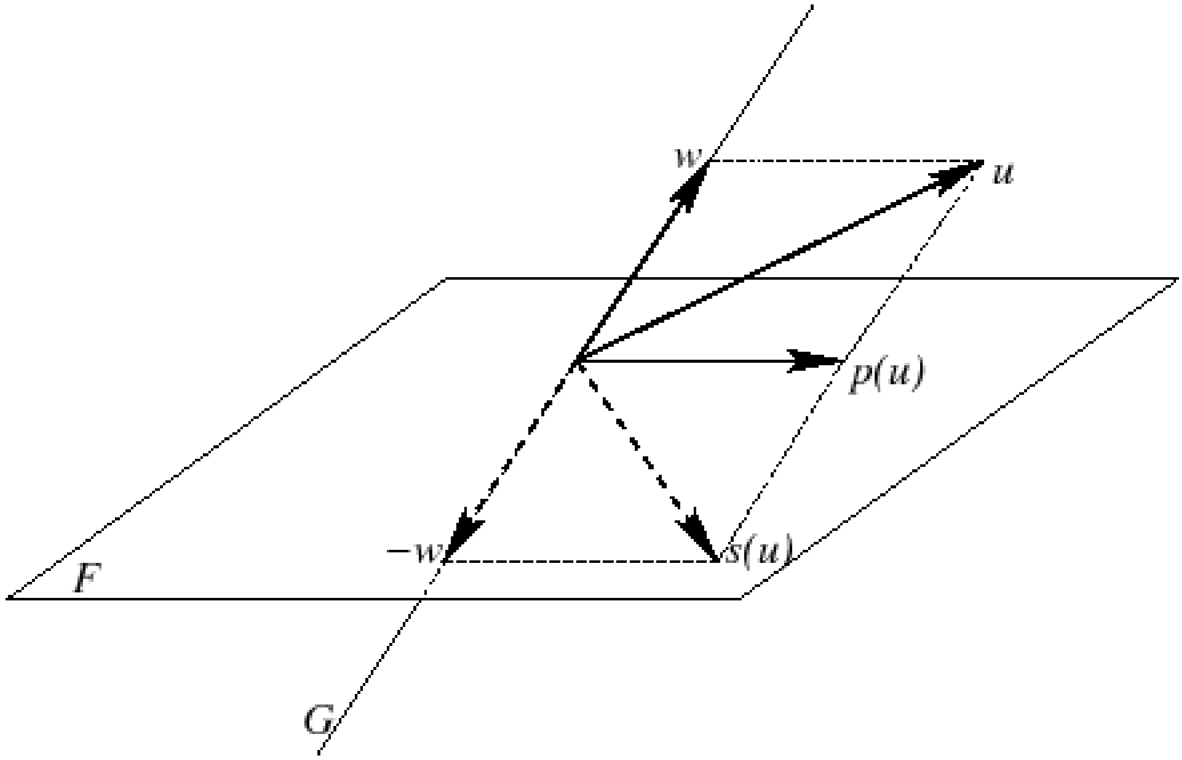
Dans ce cas, p est un projecteur sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ et on a donc $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im} p$.

Remarque. p^2 signifie $p \circ p$

Définition 15. (symétrie)
Soit F et G tels que $E = F \oplus G$. On appelle symètrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s vérifiant $s(u) = u_F - u_G$.
On a donc $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2q$.

Proposition 33. (Propriétés des symétries)
On a $s \circ s = \mathrm{id}_E$ et $E_1 = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Sur le dessin ci-dessous est représenté un plan F et une droite G et pour un vecteur u, $p(u)$ la projection de ce vecteur sur F parallèlement à G et $s(u)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.



w
u
$p(u)$
$-w$
$s(u)$
F
G

5 Compléments : Opérations sur les endomorphismes, polynômes d'endomorphismes

Définition 16. (endomorphismes qui commutent)
Soient f et g deux endomorphismes de E.

On dit que f et g commutent lorsque $f \circ g = g \circ f$.

Exemple 2. L'application nulle et id_E commutent avec tous les endomorphismes de E

Remarque. Seuls des endomorphismes peuvent commuter. En effet, si f et g sont des applications linéaires définies respectivement sur E et E' et que f et g commutent. Alors pour tout $x \in E$, on doit avoir $g\Big(f(x)\Big) = f\Big(g(x)\Big)$. Donc il faut que $g(x)$ soit définie pour tout $x \in E$ ce qui signifie que g doit être définie sur E donc que E' soit égal à E. De même il faut que $g\Big(f(x)\Big)$ soit définit donc il faut que, pour tout x, $f(x) \in E$, donc que f appartienne à $\mathscr{L}(E)$ et de même on montre que pour tout $x \in E$, on doit avoir $g(x) \in E$ donc g doit être un endomorphisme de E.

Définition 17. (Puissances d'un endomorphisme)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On note f^n l'endomorphisme de E défini par :

$$f^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{Si } n = 0 \\ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{composée } n \text{ fois}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 3.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y, x + 3y - z, x + y)$. Calculer f^2

Solution rédigée de l'exemple 3

f et bien un endomorphisme (de $\mathbb{R}^3$) donc f^2 est bien définie.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
f^2(x,y,z) &= f \circ f(x,y,z) \\
&= f\Big(f(x,y,z)\Big) \\
&= f(\underbrace{2x-y}_{X}, \underbrace{x+3y-z}_{Y}, \underbrace{x+y}_{Z}) \\
&= (2X - Y, X + 3Y - Z, X + Y) \\
&= (4x - 2y - x - 3y + z, 2x - y + 3x + 9y - 3z - x - y, 2x - y + x + 3y - z) \\
&= \boxed{(3x - 5y + z, 4x + 7y - 3z, 3x + 2y - z)}
\end{aligned}$$

Proposition 34. (Règles de calcul sur les puissances d'endomorphismes)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ f^n \circ f^m = f^{n+m} \text{ et } (f^n)^m = f^{nm} = (f^m)^n .$$

Remarque. On en déduit que deux puissances f^n et f^m d'un même endomorphisme commutent :

$$f^n \circ f^m = f^{n+m} = f^{m+n} = f^m \circ f^n.$$

Proposition 35. (formule du binôme de Newton)
Si f et $g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

On fera bien attention au $\circ$ qui apparaît dans la somme. On voit qu'il faut être particulièrement rigoureux quand on applique cette formule !

Exemple 4.
soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f commute avec id_E donc :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{id}_E)^2 &= f^2 + 2f \circ \mathrm{id}_E + (\mathrm{id}_E)^2 \\
&= \boxed{f^2 + 2f + \mathrm{id}_E.}
\end{aligned}$$

On alors, pour tout $u \in E$:

$$(f + \mathrm{id}_E)^2 (u) = f^2(u) + 2f(u) + \mathrm{id}_E(u) = f^2(u) + 2f(u) + u$$

Définition 18. (Polynôme d'endomorphisme)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.
On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

On a alors, pour tout $u \in E$:

$$P(f)(u) = a_0 u + a_1 f(u) + \cdots + a_n f^n(u).$$

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exemple 5.
Soit $f : (x, y) \mapsto (-y, -x)$ et $P = X^2 - 1$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
2. Déterminer $P(f)$.

Solution rédigée de l'exemple 5

1. f est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Il reste à montrer qu'elle est linéaire.
   Soit $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(au + bv) &= f\Big(a(x, y) + b(x' + y')\Big) \\ &= f(\underbrace{ax + bx'}_{X}, \underbrace{ay + by'}_{Y}) \\ &= (-Y, -X) \\ &= (-ay - by', -ax - bx') \\ &= a(-y, -x) + b(-y', -x') \\ &= af(u) + bf(v) \end{aligned}$$

2. $P(f) = f^2 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(f)(x, y) = f^2(x, y) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(x, y) = f(-y, -x) - (x, y) = (x, y) - (x, y) = 0.$$

   $P(f)$ est donc l'application nulle, donc P est un polynôme annulateur de f.

Définition 19. (Puissances négatives d'un automorphisme)
Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit f^{-n} par :

$$f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n.$$

Toutes les règles de calcul vues à la proposition 34 restent vraies avec $n, m \in \mathbb{Z}$.