Feuille d'exercices n° 22 - Applications linéaires

1 Exercices

Exercice 1.
Démontrer que les applications ci-dessous sont des linéaires.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x-y, x+3y-z)$.
2. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X+1)+P'(X) \end{array} \right.$.
3. $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(2) \end{array} \right.$.
4. $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Exercice 2.
Dans chaque cas, démontrer que l'application est linéaire.

1. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y) \end{array} \right.$.
2. $g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y-t, y+z) \end{array} \right.$.
3. $h \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array} \right.$.
4. $i \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP'(2X)-P(X) \end{array} \right.$.
5. $j \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}AM+MA \end{array} \right.$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice donnée.

Exercice 3. Ecricome 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4.
Montrer que $f : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.
On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $g(x,y) = (x-y, x+2y, 3x, 4y-x)$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6.
On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(x,y,z)=(2x+3z,x+y-z,4z)$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ vu à l'exercice 3 et défini par :

$$\varphi(P)=4XP'(X)-P''(X).$$

1. On prend ici $n=3$. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On revient au cas général. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $i\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto & XP'(2X)-P(X)\end{array}\right.$. On admet que i est un endomorphisme.
Donner la matrice de i dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9.
On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&1&0\\-1&-1&4\end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de $h(x,y,z)$.
2. Écrire la matrice de h dans la base (e_1,e_3,e_2)

Exercice 10.
On considère l'application linéaire : $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z)=(2x+y,x-2z).$$

Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 11.
On considère l'endomorphisme : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+2y,2x+y)$.
Démontrer que f est un automorphisme.

Exercice 12.
On considère l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(2x-y+z,x+3y-z,x+2y)$.
Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im} f$. On pensera ici à utiliser le théorème du rang pour $\operatorname{Im} f$!

Exercice 13.
Soit $g:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z,3x-2z,x+y)\end{array}\right.$.
On admet que g est un endomorphisme. Déterminer une base de $\operatorname{Im} g$.

Exercice 14.
Soit $h:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & XP(X)-P(X+1)\end{array}\right.$.
On admet que h est une application linéaire. Déterminer une base de $\operatorname{Im} h$.

Exercice 15.
Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+2y, y) \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Déterminer son noyau et son image.
2. Montrer que $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer son noyau et son image.
3. Montrer que $g \circ f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser l'expression de $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 16.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de de $\operatorname{Ker} f$ puis une base de $\operatorname{Im} f$.
3. On appelle "commutant de la matrice A" l'ensemble noté $C(A)$ des matrices qui commutent avec A :
$$C(A) = \Big\{ M \in \mathcal{M}_2(R) \,|\, AM = MA \Big\}.$$
   (a) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une matrice B telle que :
$$C(A) = \Big\{ \alpha I_2 + \beta B, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

Exercice 17.
Soit n un entier $n \geq 2$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n(X)$, on définit :
$$f(P) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ en en donnant une base.
3. Calculer $f(Q)$ où $Q(X) = X - 1$.
4. *Bonus :* Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 18.
On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = P(X+1) + P'(X)$.

1. Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Détermine la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Retrouvez alors le résultat précédent et déterminer φ^{-1}.

Exercice 19.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $f(1,2) = (1,3)$ et $f(1,1) = (-1,2)$ et préciser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$.

Exercice 20.
Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 21.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, -z, y+2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
2. Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire que que la famille $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exercice 22.
Rappel : on note $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$.
On note$g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de $g(x,y,z)$.
2. Vérifier à l'aide de la matrice N que $g^2 \neq 0$ et que $g^3 = 0$.
3. Donner un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$ et $g^3(u) = 0$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice de g dans cette base.

Exercice 23.
Soit E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E de dimension n.
Montrer que si $p^2 = p$ alors $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
Bonus : Démontrer le même résultat dans le cas où E n'est pas un espace de dimension finie et préciser la décomposition de x dans la somme directe $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Exercice 24.
Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.
Montrer que p est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 25.
On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :
$$f(M) =^t AM + MA$$
2. (a) Soit M une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$
   (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$
4. (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
   (b) En déduire une base de $\operatorname{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$
   (c) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$

Exercice 26.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel F défini par :
$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = u\right\}.$$
4. Démontrer que $\operatorname{Ker} f \oplus F = \mathbb{R}^3$.
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple.
6. Montrer que f est un projecteur.