Programme de colle n° 25
Semaine du 10/05/2021
Applications linéaires

Pour cette colle, vous serez interrogés comme suit :

1. Première question de cours notée sur 2
2. Deuxième question de cours notée sur 2
3. Un exercice préparé noté sur 8, de niveau 1.
4. Un deuxième exercice, noté sur 8, qui sera soit non préparé, soit préparé de niveau 1 ou 2 selon la réussite de votre premier exercice et votre niveau général.

Table des matières

Questions de cours **1**

Exercices préparés **2**
Exercices préparés de niveau 1 2

Correction des exercices **4**

Questions de cours

Question de Cours "AL-001"

Que signifie qu'une application f et une application linéaire ?

Réponse attendue :
Une application f est une application linéaire si son ensemble de départ E et son ensemble d'arrivée F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et si , pour tous réels a et b et tous vecteurs $u, v \in E$,

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v).$$

Question de Cours "AL-002"

Comment note-t-on l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Réponse attendue :
On le note $\mathscr{L}(E, F)$.

Question de Cours "AL-003"

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Quelle est l'image de 0_E par f ?
2. Écrire, à l'aide du symbole somme, la propriété de linéarité sur n vecteurs.

Réponse attendue :

1. $f(0_E) = 0_F$.

2. $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$.

Question de Cours "AL-004"

Que peut-on dire de la somme de la différence ou de la composée de deux applications linéaires ?

Réponse attendue :
Que c'est encore une application linéaire.

Question de Cours "AL-005"

Qu'appelle-t-on un isomorphisme ? Un endomorphisme ? Un automorphisme ? Une forme linéaire ?

Réponse attendue :

- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un endomorphisme est une application linéaire qui a le même ensemble d'arrivée et de départ.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
- Une forme linéaire est une application linéaire dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ (si l'espace de départ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Question de Cours "AL-006"

1. Que peut-on dire de la réciproque d'un isomorphisme ?
2. Si f et g sont des isomorphismes, que peut-on dire de $f \circ g$?

Réponse attendue :

1. La réciproque d'un isomorphisme est linéaire et c'est donc elle-même un isomorphisme.
2. Si f et g sont des isomorphismes, alors $f \circ g$ est aussi un isomorphisme et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Question de Cours "AL-007"

Qu'appelle-ton le noyau et l'image d'une application linéaire f allant de E dans F. Que peut-on dire de ces deux ensembles ?

Réponse attendue :

- Le noyau de f est l'ensemble défini par :
$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\}.$$
- L'image de f est l'ensemble défini par :
$$\operatorname{Im} f = \{f(u) \,|\, u \in E\}.$$

- Ces deux ensembles sont des espaces vectoriels. $\text{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Question de Cours "AL-008"

Donner la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ par le noyau et par l'image de f.

Réponse attendue :

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}\, f = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}\, f = F$.

Question de Cours "AL-009"

Dans le cas où E et F sont de dimension finie, donner les conditions nécessaires que doivent respecter les dimensions de E et F pour que f soit injective ou surjective.

Réponse attendue :

- Pour que f soit injective, on doit avoir $\dim E \leq \dim F$. Donc si $\dim E > \dim F$ alors f ne peut pas être injective.
- Pour que f soit surjective, on doit avoir $\dim E \geq \dim F$. Donc si $\dim E < \dim F$ alors f ne peut pas être surjective.
- Pour que f soit bijective, on doit avoir $\dim E = \dim F$. Donc si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut pas être bijective.

Question de Cours "AL-010"

Comment peut-on obtenir une base de $\text{Im}\, f$ (dans le cas où f est une application linéaire) ?

Réponse attendue :
Pour obtenir une base de $\text{Im}\, f$, il suffit d'avoir une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace de départ E.
Alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}\, f$.
En pratique, on prend généralement la base canonique de E.

Question de Cours "AL-011"

Énoncer le théorème du rang.

Réponse attendue :
Si f est une application linéaire dont l'espace de départ E est de dimension finie, alors :

$$\dim\,(\text{Ker}\, f) + \dim\,(\text{Im}\, f) = \dim\,(E).$$

Exercices préparés

Exercices préparés de niveau 1

Exercice 1.
Démontrer la caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x-y, x+3y-z)$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 3.
Soit $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y) \end{array} \right.$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 4.
Soit $g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y-t, y+z) \end{array} \right.$.
Montrer que g est linéaire.

Exercice 5.
Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X+1) + P'(X) \end{array} \right.$.
Montrer que φ est linéaire.

Exercice 6.
Soit $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 e^{-t} f(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$.
Montrer que ψ est linéaire.

Exercice 7.
Soit $j \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}AM + MA \end{array} \right.$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice donnée.
Montrer que j est linéaire.

Exercice 8. Ecricome 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9.
Montrer que $f : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 10.
On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $g(x,y) = (x-y, x+2y, 3x, 4y-x)$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11.
On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(x,y,z)=(2x+3z,x+y-z,4z)$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ vu à l'exercice 3 et défini par :

$$\varphi(P)=4XP'(X)-P''(X).$$

1. On prend ici $n=3$. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On revient au cas général. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13.
On considère l'application linéaire : $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z)=(2x+y,x-2z).$$

Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 14. (*correction*)
On considère l'endomorphisme : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+2y,2x+y)$.
Démontrer que f est un automorphisme.

Exercice 15. (*correction*)
On considère l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(2x-y+z,x+3y-z,3x+2y)$.
Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im} f$. On pensera ici à utiliser le théorème du rang pour $\operatorname{Im} f$!

Exercice 16. (*correction*)
Soit $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z,3x-2z,x+y)\end{array}\right.$.
On admet que g est un endomorphisme. Déterminer une base de $\operatorname{Im} g$.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 14 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction en pdf ici et la correction en vidéo ici.

Correction de l'exercice 15 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction en pdf ici et la correction en vidéo ici.

Correction de l'exercice 16 (*retour à l'exercice*)
Voir la correction en pdf ici et la correction en vidéo ici.