# Exercice 12 FE22 - Correction.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x - y + z, x + 3y - z, \overset{3x+2y}{\cancel{x+2y}})$.
Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\, f$. On pensera ici à utiliser le théorème du rang pour $\mathrm{Im}\, f$ !

$$f(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y - z = 0 & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 7y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 7y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{9z}{7} + z \\ y = \frac{3z}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{2z}{7} \\ y = \frac{3z}{7} \end{cases}$$

$$\ker f = \left\{ \left(-\frac{2}{7}z, \frac{3}{7}z, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 1\right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 1\right)\right)}$$

Donc $\ker f$ est un espace vectoriel de dimension 1, ayant pour base $\left(\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 1\right)\right)$

On a $\dim(\ker f) = 1$

Or $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 1 = 2$

$f(1,0,0) = (2,1,3) \in \operatorname{Im} f$.
$f(0,1,0) = (-1,3,2) \in \operatorname{Im} f$.

Or $(2,1,3)$ et $(-1,3,2)$ ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{Donc } ((2,1,3), (-1,3,2)) \text{ est libre donc c'est une base de } \operatorname{Im} f}$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1,3),(-1,3,2))$