Exercice 11.
On considère l'endomorphisme : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+2y, 2x+y)$.
Démontrer que f est un automorphisme.

$$f(x,y) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\ker f = \{(0,0)\}$ donc f est injective.

$\dim(\ker f) = 0$

or $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } \dim(\operatorname{Im} f) = 2 - 0 = 2 \\ \text{Or } \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \text{Donc } \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$$

Donc f est surjective

D'où $\boxed{f \text{ est un automorphisme}}$