

Exercice 13.

$$\text{Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, 3x - 2z, x + y) \end{cases} .$$

On admet que g est un endomorphisme. Déterminer une base de $\text{Im } g$.

$$g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + \frac{3}{2}x = 0 \\ z = \frac{3}{2}x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\ker g = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{dnc} \quad \dim(\ker g) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{D'où } \dim(\text{Im } g) = 3 - 0 = 3 \\ \text{Or } \text{Im } g \subset \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \text{Dnc } \underline{\text{Im } g = \mathbb{R}^3}$$

$((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\text{Im } g$