Programme de colle n° 26
Semaine du 17/05/2021
Applications linéaires

Pour cette colle, vous serez interrogés comme suit :

1. Première question de cours notée sur 2
2. Deuxième question de cours notée sur 2
3. Un exercice préparé noté sur 8, de niveau 1.
4. Un deuxième exercice, noté sur 8, qui sera soit non préparé, soit préparé de niveau 1 ou 2 selon la réussite de votre premier exercice et votre niveau général.

Table des matières

Questions de cours

Question de Cours "AL-001"

Que signifie qu'une application f et une application linéaire ?

Réponse attendue :

Une application f est une application linéaire si son ensemble de départ E et son ensemble d'arrivée F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et si , pour tous réels a et b et tous vecteurs $u, v \in E$,

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v).$$

Question de Cours "AL-002"

Comment note-t-on l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Réponse attendue :

On le note $\mathscr{L}(E, F)$.

Question de Cours "AL-003"

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Quelle est l'image de 0_E par f ?
2. Écrire, à l'aide du symbole somme, la propriété de linéarité sur n vecteurs.

Réponse attendue :

1. $f(0_E) = 0_F$.

2. $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$.

Question de Cours "AL-004"

Que peut-on dire de la somme de la différence ou de la composée de deux applications linéaires ?

Réponse attendue :
Que c'est encore une application linéaire.

Question de Cours "AL-005"

Qu'appelle-t-on un isomorphisme ? Un endomorphisme ? Un automorphisme ? Une forme linéaire ?

Réponse attendue :

- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un endomorphisme est une application linéaire qui a le même ensemble d'arrivée et de départ.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
- Une forme linéaire est une application linéaire dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ (si l'espace de départ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Question de Cours "AL-006"

1. Que peut-on dire de la réciproque d'un isomorphisme ?
2. Si f et g sont des isomorphismes, que peut-on dire de $f \circ g$?

Réponse attendue :

1. La réciproque d'un isomorphisme est linéaire et c'est donc elle-même un isomorphisme.
2. Si f et g sont des isomorphismes, alors $f \circ g$ est aussi un isomorphisme et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Question de Cours "AL-007"

Qu'appelle-ton le noyau et l'image d'une application linéaire f allant de E dans F. Que peut-on dire de ces deux ensembles ?

Réponse attendue :

- Le noyau de f est l'ensemble défini par :
$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\}.$$
- L'image de f est l'ensemble défini par :
$$\operatorname{Im} f = \{f(u) \,|\, u \in E\}.$$

- Ces deux ensembles sont des espaces vectoriels. $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Question de Cours "AL-008"

Donner la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ par le noyau et par l'image de f.

Réponse attendue :

- f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Question de Cours "AL-009"

Dans le cas où E et F sont de dimension finie, donner les conditions nécessaires que doivent respecter les dimensions de E et F pour que f soit injective ou surjective.

Réponse attendue :

- Pour que f soit injective, on doit avoir $\dim E \leq \dim F$. Donc si $\dim E > \dim F$ alors f ne peut pas être injective.
- Pour que f soit surjective, on doit avoir $\dim E \geq \dim F$. Donc si $\dim E < \dim F$ alors f ne peut pas être surjective.
- Pour que f soit bijective, on doit avoir $\dim E = \dim F$. Donc si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut pas être bijective.

Question de Cours "AL-010"

Comment peut-on obtenir une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (dans le cas où $f : E \to F$ est une application linéaire) ?

Réponse attendue :
Pour obtenir une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, il suffit d'avoir une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace de départ E.
Alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
En pratique, on prend généralement la base canonique de E.

Question de Cours "AL-011"

Énoncer le théorème du rang.

Réponse attendue :
Si f est une application linéaire dont l'espace de départ E est de dimension finie, alors :

$$\dim\,(\operatorname{Ker} f) + \dim\,(\operatorname{Im} f) = \dim\,(E).$$

Question de Cours "AL-012"

Que signifie que deux espaces vectoriels sont isomorphes ? Quelle est, en dimension finie, une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes.

Réponse attendue :
Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme f de E vers F.
Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Question de Cours "AL-013"

Donner la caractérisation d'un hyperplan par les formes linéaires

Réponse attendue :
Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Question de Cours "AL-014"

Donner la caractérisation d'un isomorphisme par l'image d'une base.

Réponse attendue :
Une application linéaire f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base par f est une base.

Exercices préparés

Exercices préparés de niveau 1

Tous les exercices de la FE 22 sauf les 16, 19, 20 et 22. Beaucoup de corrections sont sur la chaine youtube.