Chapitre 23

Comparaison de fonctions - développements limités

Table des matières

1 Comparaison de fonctions

1.1 Négligeabilité

Définition 1. (Négligeabilité pour les fonctions)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, on on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On a donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$$

Proposition 1. (Caractérisation de la négligeabilité)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.
f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

Proposition 2. (Croissances comparées)
On peut exprimer les croissances comparées à l'aide des relations de négligeabilité :
Pour tout $\alpha,\ \beta > 0$,

1. $(\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$.
2. $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^x\right)$.
3. $(\ln x)^\beta \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

Exemple 1.

1. $x^3 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^4)$
(« la plus grande puissance l'emporte au voisinage de l'infini. »)
2. $x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$
(« la plus petite puissance l'emporte au voisinage de 0. »)
3. $x^4 - 5x^3 + 2x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^5)$.
4. $x^4 - 5x^3 + 2x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$.
5. $x^{2021} + \ln x = \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$.

Proposition 3. (Fonction négligeable devant une constante)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f une fonction définie au voisinage de a sauf peut-être en a.
Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Proposition 4. (Négligeabilité et limites)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ **et que** f **et** g **sont positives au voisinage de** a alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Proposition 5. (Opérations élémentaires sur les relations de négligeabilité)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f, g, h trois fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(g(x)\Big)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(g(x)h(x)\Big)$.
   Autrement dit : $h(x)o\Big(g(x)\Big) = o\Big(g(x)h(x)\Big)$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(\lambda g(x)\Big)$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(\lambda g(x)\Big)$.
   Autrement dit : $o\Big(\lambda g(x)\Big) = o\Big(g(x)\Big)$.
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} \lambda o\Big(g(x)\Big)$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(g(x)\Big)$.
   Autrement dit : $\lambda o\Big(g(x)\Big) = o\Big(g(x)\Big)$.
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(h(x)\Big)$ et $g(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(h(x)\Big)$ alors $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(h(x)\Big)$.
   Autrement dit : La somme de deux petits "o" de h est encore un petit o de h.

Exemple 2.

1. $\Big(x^3 + x\ln x + o(x)\Big) + \Big(e^x - x^3 + o(x)\Big) + \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{=} e^x + x\ln x + o(x).$
2. $\Big(x^3 + x\ln x + o(x)\Big) - \Big(e^x - x^3 + o(x)\Big) + \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{=} -e^x + 2x^3 + x\ln x + o(x).$

1.2 Équivalence

Définition 2. (Équivalence pour les fonctions)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, on on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On a donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.}$$

Proposition 6. (Caractérisation de l'équivalence)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.
f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 1$ et telle que $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.

Exemple 3.
Montrons que $\ln(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$.

Proposition 7. (Fonction équivalente à une constante non nulle)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, f une fonction définie au voisinage de a sauf peut-être en a et $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Attention ! Cela n'a aucun sens de dire que f est équivalente à 0 au voisinage de a. En effet, cela reviendrait à diviser par 0.
On n'écrira donc **jamais** $f(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$! !

Proposition 8. (Équivalents implique de même signe)
Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe au voisinage de a.

Proposition 9. (Équivalents implique "de même nature et de même limite")
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.
Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même comportement au voisinage de a :

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ (même si $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$).
2. Si f n'a pas de limite en a alors g non plus.

Proposition 10. (Opérations élémentaires avec les équivalentes)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g}$ des fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$.
   Autrement dit : *la relation d'équivalence est transitive.*

2. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \tilde{f}(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} \tilde{g}(x)$ alors $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\sim} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.
   Autrement dit : *On peut remplacer une fonction par une fonction équivalente dans un produit ou un quotient. On obtient alors un produit ou un quotient équivalent.*

3. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ (et $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ si α n'est pas entier) alors $\Big(f(x)\Big)^{\alpha} \underset{x \to a}{\sim} \Big(g(x)\Big)^{\alpha}$
   Autrement dit : *On peut élever un équivalent à une puissance constante*

Attention ! Toute opération non mentionnée ci-dessus est à considérer comme fausse ! C'est le cas, en général, **de la somme et de la composition.**
Si on n'est pas certain de ce que l'on fait avec les équivalentes, il faut toujours revenir à la définition.

Proposition 11. (Lien entre équivalence et négligeabilité)
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions réelles définies et non nulles au voisinage de a, sauf peut-être en a.

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o\Big(g(x)\Big).$$

Proposition 12. (Équivalence et polynômes)
Soit $p \leq n$ deux entiers et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant qui s'écrit :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_p X^p \qquad \text{avec } a_n \neq 0 \text{ et } a_p \neq 0.$$

(P est donc un polynôme de degré n et de **valuation** p).
Alors

$$P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p.$$

Autrement dit : *Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$ ou en $-\infty$ et il est équivalent à son terme de plus bas degré en 0.*

Proposition 13. (Équivalents usuels - cas simple - A CONNAITRE PAR CŒUR)

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.
3. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
4. $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
5. $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
6. $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
7. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
8. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

Proposition 14. (Équivalents usuels - cas composé - A CONNAITRE PAR CŒUR)
Si f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors :

1. $\ln(1+f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
2. $\sin(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
3. $\cos(f(x)) - 1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2}$.
4. $\tan(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
5. $\operatorname{Arctan}(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
6. $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
7. $\left(1+f(x)\right)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x)$.

Remarque. On complètera la liste ci-dessus par l'équivalent suivant, à connaître par cœur également :

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \text{ alors } \ln\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x) - 1$$

2 Développements limités

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 3. (Développement limité en x_0)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage I de x_0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 (abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe $n+1$ réels a_0, a_1,...,a_n et une fonction ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Dans ce cas, les coefficients a_0, a_1,...,a_n sont uniques et le polynôme $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ est appelé *partie régulière* du développement limité.

En posant $h = x - x_0$ dans la définition ci-dessus, on obtient une autre formulation du DL_n, souvent utilisée en pratique.

Proposition 15. (Formulation équivalente d'un développement limité en x_0)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage I de x_0.

f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tq } x_0 + h \in I, \quad f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

Remarque. En pratique, on étudie toujours les DL en 0 et on se ramène toujours à ce cas.

Proposition 16. (Cas particulier : développement limité en 0)
Soit f une fonction définie sur un voisinage I de 0.

f admet un développement limité d'ordre n en 0 si et seulement si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Attention ! Un DL (développement limité) ne donne des informations que sur le comportement **local** de f au voisinage de x_0. Plus n est grand, plus on a d'informations sur le comportement de f **au voisinage** de x_0.

Un DL est donc utile essentiellement pour calculer des limites et lever des indéterminations. Il ne faut surtout pas chercher à utiliser un DL pour établir une inégalité ou un encadrement !

Proposition 17. (DL_1 et dérivée)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage I de x_0.

f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$.

De plus, dans ce cas, avec les notations de la définition, on a $a_1 = f'(x_0)$.

Attention ! La proposition ci-dessus ne s'étend pas : une fonction peut admettre un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ sans être deux fois dérivable en x_0.

2.2 Formule de Taylor-Young

Proposition 18. (Formule de Taylor-Young)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sur un voisinage I de x_0.
Alors, on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o\Big((x-x_0)^n\Big)$$

Remarque. La formule de Taylor-Young fournit donc, pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0, un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ dont les coefficients sont les $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.

Remarque. Nous utiliserons essentiellement la formule de Taylor-Young en avec $x_0 = 0$. Celle-ci s'écrit alors :

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ dans voisinage I de 0, alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

En posant $h = x - x_0$ dans la formule de la proposition ci-dessus, on obtient une autre formulation de la formule de Taylor-Young, souvent utilisée en pratique.

Proposition 19. (Formulation équivalente de la Formule de Taylor-Young)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sur un voisinage I de x_0.
Alors, on a :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tq } x_0 + h \in I, \quad f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$$

Attention ! La formule de Taylor-Young ne fournit que des informations sur le comportement **local** de f au voisinage de x_0.
Elle ne peut en aucun cas être utilisée pour des inégalités (contrairement aux formules de Taylor avec reste intégral et de Taylor Lagrange).

2.3 Développements limités usuels

Grâce à la formule de Taylor-Young, on obtient les DL_n usuels.

Proposition 20. (DL_n usuels - à connaître PAR CŒUR)
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. **exponentielle :**
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

2. **logarithme :**
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n)$$

3. **puissance :**
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

avec le **cas particulier de l'inverse (à connaître) :**
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

et le **cas particulier de l'inverse avec $x = -x$ (à connaître) :**
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

4. sinus
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

on remarque que le $o(x^{2n+1})$ est aussi un $o(x^{2n+2})$

5. cosinus
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

on remarque que le $o(x^{2n})$ est aussi un $o(x^{2n+1})$

Remarque.
Il faut retenir la forme développée de ces DL_n et surtout savoir les donner pour des ordres pas trop grand.

Exemple 4. Donner :

1. Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$.
2. Le DL à l'ordre 3 en 0 de e^x.
3. Le DL à l'ordre 5 en 0 de $\cos x$.
4. Le DL à l'ordre 5 en 0 de $\sin x$.
5. Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+x}$.
6. Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$.

2.4 Calculs avec les DL

Attention ! Aucune opération sur les DL n'est au programme de l'ECS ! Inutile donc d'essayer de comprendre des exercices corrigés qui feraient appel à des notions telles que la somme, le produit, la composée de DL.

Par contre, il ne faut pas perdre de vu que le DL est une *égalité*. Ainsi, on peut remplacer un terme pas son DL dans un calcul. On peut alors obtenir des DL de fonctions plus complexes.

Les DL vont être utilisés essentiellement pour déterminer des limites ou obtenir des équivalents simples.

Exemple 5. Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes

1. $f(x) = \ln(1+x) - x$.
2. $g(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{1+x} - e^x$.
4. $i(x) = xe^x - (e^x - 1)$.

Exemple 6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(1+x)e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Pour finir, **on peut toujours "substituer" un terme qui tend vers 0 à la variable x dans un DL.** C'est souvent utile pour calculer une limite ou obtenir un équivalent d'une suite.

Exemple 7.

1. Déterminer un équivalent simple en 0 de $e^{x^2} - 1 - x^2$.
2. Déterminer un équivalent simple en 0 de $\ln(1 + x^2) + 2(\cos x - 1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1$.

Exemple 8.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln n$.

1. Montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, puis la convergence de la suite (u_n).