

Feuille d'exercices n° 23 - Comparaison de fonctions et DL

Exercice 1.

Donner les développements limités à l'ordre 5 en 0 de :

1. $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \ln(1+x)$

3. $x \mapsto \sqrt{1+x}$

4. $x \mapsto \cos x$

5. $x \mapsto \sin x$

6. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Exercice 2.

- Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1-x}$.
- Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$.
- Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de e^{x+x^2} .
- Donner le DL à l'ordre 2 en $\frac{1}{x}$ avec $x \rightarrow +\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$.

Exercice 3.

Déterminer un équivalent simple de $2x + x \cos x - 3 \sin x$ au voisinage de 0.

Exercice 4.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{e^x - 1 - x} \qquad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

Exercice 5.

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\sin \frac{1}{n}} - \frac{n}{\tan \frac{1}{n}} \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} n + n^2 (\ln n - \ln(n+1))$$

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
- (***) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 7.

On considère, pour $n \geq 2$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n - v_n$.
- (***) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge et déterminer sa somme.
(La série ci-dessus est la classique série harmonique alternée)

4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.