EDHEC 2019

Problème

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)t^k$$

(1) Calculer $G(1)$.

(2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

(3) Établir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(4) (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

(b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star\backslash\{1\},\ \ln n + \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$.

(c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(5) Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

(6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a,b]\!]$. Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables $A(j)$ et $A(p)$.

```
(1)  n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)  A=1:n
(3)  p=n
(4)  for k=1:n
(5)      j=grand(1,1,'uin',1,p)
(6)      aux=———
(7)      A(j)=————
(8)      A(p)=————
(9)      p=p-1
(10) end
(11) disp(A)
```

(7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur A est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
    if A(k)>m then m=A(k)
                   c=k
    end
end
disp(c)
```

(a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

(b) Quel est le contenu de la variable c affiché à la fin de ces commandes ?

(c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.
Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question (7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.
On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note G_n ma fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

(8) Donner la loi de X_1.

(9) (a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

(b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

(c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

(d) Donner la loi de X_4.

(10) (a) Vérifier que la formule obtenue à la question (9)(c) reste valable pour $j = 1$.

(b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

(11) En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ E_n = u_n$$

(12) Recherche d'un équivalent de V_n.

(a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

(c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.