Concours Blanc n° 2

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Le sujet comporte 4 exercices. Vérifiez que vous avez bien un sujet complet avant de commencer.
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x,y,z) = (y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z)$.
On pose $F = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\right\}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_0)$ où u_0 est un vecteur que vous déterminerez. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer la dimension puis une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $u \in F \iff x+y-2z = 0$.
5. On note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $g(x,y,z) = x+y-2z$. On a donc $F = \operatorname{Ker} g$.
   (a) De quel type d'application linéaire s'agit-il ?
   (b) En déduire que F est de dimension 2.
6. Démontrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus \operatorname{Ker} f$.
7. Donner une base (u_1, u_2) de F.
8. Démontrer que (u_0, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.
9. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ainsi que la matrice B de f dans la base (u_0, u_1, u_2).

Exercice 2

On dispose de trois pièces indiscernables : une pièce équilibrée, numérotée 0, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
On note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
On note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X=0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance et la calculer.
   En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.
4. Justifier sans faire aucun calcul que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P\Big((X=1)\cap(Y=j)\Big) = P(Y=j)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P\Big((X=i)\cap(Y=1)\Big) = P(X=i)$.
6. Loi de $X+Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P\Big(X+Y=1\Big) = \dfrac{2}{3}$.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$P\Big(X+Y=n\Big) = P\Big((X=1)\cap(Y=n-1)\Big) + P\Big((Y=1)\cap(X=n-1)\Big)$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P\Big(X+Y=n\Big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
7. **Informatique**
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,"uin",______,______)
x=1
if piece==0
then lancer=grand(1,1,"uin",______,______)
    while lancer==0
        lancer=______________________
        x=________
    end
else
    if piece==1 then x=______
    end
end
disp(x)
```

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'ensemble $E = \Big\{P \in \mathbb{R}_{n+2}[X] \mid P(0) = P(4) = 0\Big\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.
2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = PW$.
   Par exemple, $\phi(X^2 + X - 3) = (X^2 + X - 3)W(X) = (X^2 + X - 3)X(X-4)$.
   (a) Montrer que l'application ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E.
   (b) Montrer que ϕ est injective.
   (c) Soit $P \in E$. On note Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par W. Montrer que $P = \phi(Q)$.
   (d) En déduire que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E.
   (e) En déduire la dimension de E ainsi qu'une base de E.
3. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.
   On admet que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Démontrer que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, le degré de $\Delta(X^k)$ est égal à $k-1$.
4. On définit l'application f définie sur E par : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$.
   (a) Justifier, sans aucun calcul, que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(W)$.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k W) = W\Delta(X^k)$.
   (d) En déduire que $\Big(W\Delta(X), \dots, W\Delta(X^n)\Big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

1. Montrer que lorsque $x \geq 1$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ diverge vers $+\infty$

2. **Étude plus approfondie du cas $x = 1$.**

   On suppose maintenant que $x = 1$. On va donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche S_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=[1:n]
S=________________
disp(S)
```

   (b) Justifier que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

   (d) En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

3. Dans cette question, on prend $x \in [0; 1[$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0; x]$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   (c) Montrer que $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

   (d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ est convergente et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$