Concours Blanc n° 2

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Le sujet comporte 4 exercices. Vérifiez que vous avez bien un sujet complet avant de commencer.
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x,y,z) = (y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z)$.
On pose $F = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\right\}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(au+bv) &= f\Big((ax,ay,az)+(bx',by',bz')\Big)\\
&= f\Big(\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z}\Big)\\
&= \Big(Y-2Z, 2X+Y-4Z, X+Y-2Z\Big)\\
&= \Big(ay+by'-2(az+bz'), 2(ax+bx')+ay+by'-4(az+bz'), ax+bx'+ay+by'-2(az+bz')\Big)\\
&= a(y-2z, 2x+y-4z, x+y-2z)+b(y'-2z', 2x'+y'-4z', x'+y'-2z')\\
&= af(u)+bf(v)
\end{aligned}$$

   Donc f est bien linéaire. Or f va clairement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

2. Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_0)$ où u_0 est un vecteur que vous déterminerez. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
   Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x,y,z) = 0\\
&\iff \begin{cases} y-2z &= 0\\ 2x+y-4z &= 0\\ x+y-3z &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y &= 2z\\ 2x+2z-4z &= 0\\ x+2z-3z &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y &= 2z\\ 2x-2z &= 0\\ x-z &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y &= 2z\\ x &= z\\ x &= z\end{cases}
\end{aligned}$$

   donc $\operatorname{Ker} f = \left\{(z,2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z(1,2,1) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\Big((1,2,1)\Big)$.
   $\boxed{\text{On a donc bien } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_0) \text{ avec } u_0 = (1,2,1).}$ Donc $\boxed{\dim(\operatorname{Ker} f) = 1}$.

3. Déterminer la dimension puis une base de $\operatorname{Im} f$.
On a, d'après le théorème du rang :
$$\dim\,(\operatorname{Ker} f) + \dim\,(\operatorname{Im} f) = \dim\,\left(\mathbb{R}^3\right).$$
Donc $\boxed{\dim\,(\operatorname{Im} f) = 3 - 1 = 2}$.
$\operatorname{Im} f$ étant de dimension 2, pour en trouver une base, il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Im} f$.
On peut par exemple choisir : $f(1,0,0) = (0,2,1)$ et $f(0,1,0) = (1,1,1)$.
Ces deux vecteurs sont dans $\operatorname{Im} f$ par définition et ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.
$\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Im} f \text{ est donc } \big((0,2,1),(1,1,1)\big).}$

4. Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $u \in F \iff x+y-2z = 0$.
$$\begin{aligned} u \in F &\iff f(x,y,z) = -(x,y,z) \\ &\iff \begin{cases} y-2z &= -x \\ 2x+y-4z &= -y \\ x+y-3z &= -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ 2x+2y-4z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x+y-2z = 0 \end{aligned}$$
$\boxed{\text{On a donc bien } u \in F \iff x+y-2z = 0.}$

5. On note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $g(x,y,z) = x+y-2z$. On a donc $F = \operatorname{Ker} g$.

 (a) De quel type d'application linéaire s'agit-il ?
 Il s'agit d'une forme linéaire.

 (b) En déduire que F est de dimension 2.
 On sait (l'énoncé le dit) que $F = \operatorname{Ker} g$. Donc F est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc c'est un hyperplan de l'espace de départ de g c'est-à-dire de $\mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{\dim F = 2.}$

6. Démontrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus \operatorname{Ker} f$.
On a $\dim F + \dim\,(\operatorname{Ker} f) = 2 + 1 = 3$. Il reste à montrer que $F \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
Soit $u \in F \cap \operatorname{Ker} f$. Montrons que $u = 0$.
On a $u \in F$ donc $f(u) = -u$ et $u \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(u) = 0$.
D'où, $-u = 0$ et donc $u = 0$. On a donc bien $F \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc la somme est directe et finalement on a bien $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus \operatorname{Ker} f}$

7. Donner une base (u_1, u_2) de F.
F étant de dimension 2, pour trouver une base, il suffit de trouver 2 vecteurs non colinéaires de F.
On sait aussi que $(x, y, z) \in F \iff x + y - 2z = 0$.
Ainsi pour trouver deux éléménts de F, il suffit de trouver 2 triplets (x, y, z) qui vérifient cette équation.
On peut par exemple choisir $\boxed{u_1 = (2, 0, 1)}$ et $\boxed{u_2 = (0, 2, 1)}$ (mais bien d'autres choix sont possibles !)
u_1 et u_2 sont clairements dans F (leurs coordonnées satisfont bien l'équation $x + y - 2z = 0$ et sont non colinéaire.
Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2) \text{ est une famille libre à 2 éléments de } F \text{ donc une base de } F.}$

8. Démontrer que (u_0, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{Ker} f$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ donc la concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de F donne une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{(u_0, u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

9. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ainsi que la matrice B de f dans la base (u_0, u_1, u_2).

Pour la matrice A, aucune justification n'est nécessaire car on vu cela en cours :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Pour matrice B, par définition de $\operatorname{Ker} f$ on a $f(u_0) = 0$ et par définition de F, on a $f(u_1) = -u_1$ et $f(u_2) = -u_2$. D'où :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

On dispose de trois pièces indiscernables : une pièce équilibrée, numérotée 0, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
On note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
On note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.
$(X = 1)$ est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer , avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2. La formule des probabilités totales ,écrite avec le système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) donne donc :

$$P(X = 1) = P(P_1) = P(A_0) \times P_{A_0}(P_1) + P(A_1) \times P_{A_1}(P_1) + P(A_2) \times P_{A_2}(P_1)$$

Et comme $P_{A_0}(P_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(P_1) = 0$, $P_{A_2}(P_1) = 1$ et $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$,
on obtient :

$$P(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

(b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X = n) = P(A_0) \times P_{A_0}(X = n) + P(A_1) \times P_{A_1}(X = n) + P(A_2) \times P_{A_2}(X = n)$$

Pour $n \geq 2$:

- $(\bullet]$ $P_{A_0}(X = n) = P_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, car c'est la probabilité d'avoir $n - 1$ "face" puis un "pile" avec la pièce 0, les lancers étant indépendants une fois la pièce choisie.
- $(\bullet]$ $P_{A_1}(X = n) = 0$ car la pièce 1 ne donne jamais "pile" .
- $(\bullet]$ $P_{A_2}(X = n) = 0$ car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.

On a alors pour $n \geq 2$:

$$P(X = n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$
Calculons d'abord :

$$P(X \neq 0) = P(X = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a ici une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente mais qui commence à $n = 2$.

Donc $P(X \neq 0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Par conséquent :

$$P(X = 0) = 1 - P(X \neq 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
   X admet une espérance si et seulement si la série $\sum nP(X=n)$ est (absolument) convergente.
   Or, pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) &= 0 + 1 \times P(X=1) + \sum_{n=2}^{N} nP(X=n) \\
&= 0 + 1 \times \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} n \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

   On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.
   Par suite $E(X)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(4-1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

   Donc : $\boxed{E(X) = 1}$

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance et la calculer.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X)=\dfrac{4}{3}$.

D'après le théorème du transfert, $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente.
Or, pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n(n-1)P(X=n) &= 0+0\times P(X=1)+\sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n)\\
&= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\\
&= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&= \frac{1}{12}\times\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée seconde de raison $\dfrac{1}{2}$, donc convergente.
D'où $E(X(X-1))$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \frac{1}{12}\times\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&= \frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3}}\\
&= \frac{1}{12}\times\frac{2}{\frac{1}{8}}\\
&= \frac{1}{12}\times 16\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{E(X(X-1))=\dfrac{4}{3}}$.

Or $X^2=X(X-1)+X$. Donc X^2 admet une espérance qui vaut :

$$E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)=\frac{4}{3}+1$$

D'où X admet une variance qui vaut :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{4}{3}+1-1=\frac{4}{3}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{V(X)=\frac{4}{3}.}$$

4. Justifier sans faire aucun calcul que Y suit la même loi que X.
   Si on échange les mots "pile" et "face", alors Y devient X, et réciproquement. Autrement dit, le problème est totalement symétrique et X et Y suivent donc la même loi.

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P\Big((X=1)\cap(Y=j)\Big)=P(Y=j)$.
   On va montrer que $(X=1)\cap(Y=j)=(Y=j)$ en montrant que $(Y=j)\subset(X=1)$.
   En effet, si $(Y=j)$ se réalise, "face" n'arrive qu'au j-ième lancer. Or $j\geq 2$. Donc on a eu "pile" au premier lancer et donc $(X=1)$ est réalisé .
   On a donc bien $(Y=j)\subset(X=1)$ et donc $(X=1)\cap(Y=j)=(Y=j)$.
   D'où : $\boxed{P\Big((X=1)\cap(Y=j)\Big)=P(Y=j)}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P\Big((X=i)\cap(Y=1)\Big)=P(X=i)$.
   On va montrer que $(X=i)\cap(Y=1)=(X=i)$ en montrant que $(X=i)\subset(Y=1)$.
   En effet, si $(X=i)$ se réalise, "pile" n'arrive qu'au i-ième lancer. Or $i\geq 2$. Donc on a eu "face" au premier lancer et donc $(Y=1)$ est réalisé .
   On a donc bien $(X=i)\subset(Y=1)$ et donc $(X=i)\cap(Y=1)=(X=i)$.
   D'où : $\boxed{P\Big((X=i)\cap(Y=1)\Big)=P(X=i)}$.

6. Loi de $X+Y$.

   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   X et Y étant des variables aléatoires entières positives ,$X+Y$ est aussi à valeurs entières positives
   - la valeur 0 est impossible pour $X+Y$, car on a $X+Y=0$ ssi ($X=0$ et $Y=0$), c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".
   - de même, 2 est une valeur impossible pour $X+Y$ car

   $$(X+Y=2)=((X=0)\cap(Y=2))\cup((X=1)\cap(Y=1))\cup((X=2)\cap(Y=0)).$$

   Or, on ne peut avoir ni $((X=0)\cap(Y=2))$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $((X=1)\cap(Y=1))$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $((X=2)\cap(Y=0))$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile") . Donc $(X+Y=2)$ est impossible.

   (b) Montrer que $P\Big(X+Y=1\Big)=\dfrac{2}{3}$.
   On a : $P(X+Y=1)=P\Big((X=0)\cap(Y=1)\Big)+P\Big((X=1)\cap(Y=0)\Big)$.

   Or $((X=0)\cap(Y=1))=(X=0)$ (puisque "$X=0$" implique "$Y=1$")
   et de même , $((X=1)\cap(Y=0))=(Y=0)$ ("que des pile" implique "pile au premier coup").

   $$\boxed{\text{Donc : } \quad P(X+Y=1)=P((X=0))+P((Y=0))=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.}$$

   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

   $$P\Big(X+Y=n\Big)=P\Big((X=1)\cap(Y=n-1)\Big)+P\Big((Y=1)\cap(X=n-1)\Big)$$

   (P_1,F_1) est un système complet d'événements donc :

   $$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= P\Big(P_1\cap(X+Y=n)\Big)+P\Big(F_1\cap(X+Y=n)\Big)\\ & P\Big((X=1)\cap(Y=n-X)\Big)+P\Big((Y=1)\cap(X=n-Y)\Big)\\ & P\Big((X=1)\cap(Y=n-1)\Big)+P\Big((Y=1)\cap(X=n-1)\Big)\end{aligned}$$

On a donc bien , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\boxed{P\Big(X+Y=n\Big) = P\Big((X=1)\cap(Y=n-1)\Big) + P\Big((Y=1)\cap(X=n-1)\Big)}$$

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P\Big(X+Y=n\Big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$P\Big(X+Y=n\Big) = P\Big((X=1)\cap(Y=n-1)\Big) + P\Big((Y=1)\cap(X=n-1)\Big)$.
Et d'après 5a) et 5b) :
$P\Big(X+Y=n\Big) = P(Y=n-1) + P(X=n-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et ,en conclusion : $\boxed{P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

7. **Informatique**

On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0. Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,"uin",______,______)
x=1
if piece==0
then lancer=grand(1,1,"uin",______,______)
    while lancer==0
        lancer=______________________
        x=________
    end
else
    if piece==1 then x=______
    end
end
disp(x)
```

```
piece = grand(1,1,"uin",0,2) \\choisir la piece c'est tirer un entre 0 et 2
x=1 \\on initialise x a 1 (utile pour la fin)
if piece==0 \\si on a choisit la piece numero 0
then lancer=grand(1,1,"uin",0,1) \\ on lance la piece
    while lancer==0 \\tant que la piece tombe sur face
        lancer=grand(1,1,"uin",0,1) \\on relance la piece
        x=x+1 \\on incremente x car on n a pas encore obtenu pile
    end
else
    if piece==2 then x=0 \\si on choisit la piece 2
    end
end
\\Si piece ne vaut ni 0 ni 2, c'est qu'on a choisit la piece 1 et donc on a pile au
premier lancer et donc x vaut 1
\\c'est bien la valeur a la quelle on a initialise x
disp(x)
```

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'ensemble $E = \left\{P \in \mathbb{R}_{n+2}[X] \mid P(0) = P(4) = 0\right\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.

   - $E \subset \mathbb{R}_{n+2}[X]$ par définition.
   - Le polynôme nul est dans E, donc E est non vide.
   - Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
     Alors
     $$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0 \text{ et } (\lambda P + \mu Q)(4) = \lambda P(4) + \mu Q(4) = 0.$$
     Donc $\lambda P + \mu Q \in E$

   $\boxed{E \text{ est donc bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_{n+2}[X].}$

2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = PW$.
   Par exemple, $\phi(X^2 + X - 3) = (X^2 + X - 3)W(X) = (X^2 + X - 3)X(X-4)$.

   (a) Montrer que l'application ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E.
   ϕ est une application linéaire car pour tous$P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et tous $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,
   $$\phi(a_1P_1 + a_2P_2) = (a_1P_1 + a_2P_2)W = a_1P_1W + a_2P_2W = a_1\phi(P_1) + a_2\phi(P_2).$$
   De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg \phi(P) = \deg(PW) = \deg P + \deg W = \deg P + 2 \leq n + 2$
   Donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$. De plus, $\phi(P)(0) = P(0)W(0) = 0$ et $\phi(P)(4) = P(4)W(4) = 0$.
   Donc $\phi(P) \in E$. Ainsi $\boxed{\phi \text{ est bien une application linéaire de } \mathbb{R}_n[X] \text{ dans } E.}$

   (b) Montrer que ϕ est injective.
   Montrons que $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$.
   Soit $P \in \operatorname{Ker}\phi$. On a $\phi(P) = 0 \iff PW = 0 \iff P = 0$ ou $W = 0$. Or $W \neq 0$ Donc $P = 0$.
   On a donc bien $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$. D'où $\boxed{\phi \text{ est injective.}}$

   (c) Soit $P \in E$. On note Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par W.
   Montrer que $P = \phi(Q)$.
   Par définition de la division euclidienne, on a $P = QW + R$ avec $\deg R < \deg W = 2$.
   Donc $\deg R \leq 1$, donc $R(X) = aX + b$.
   Or $P \in E$ donc $P(0) = P(4) = 0$.
   D'où $Q(0)W(0) + R(0) = 0$ or $W(0) = 0$ donc $R(0) = 0$ c'est-à-dire $b = 0$.
   De même $Q(4)W(4) + R(4) = 0$ or $W(4) = 0$ donc $R(4) = 0$ c'est-à-dire $4a = 0$ et donc $a = 0$.
   Donc $R = 0$ et donc $\boxed{P = QW = \phi(Q).}$

   (d) En déduire que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E.
   On a vu que ϕ est injective et la question précédente prouve que ϕ est surjective. Donc ϕ est une application linéaire bijective. Donc $\boxed{\text{c'est un isomorphisme.}}$

   (e) En déduire la dimension de E ainsi qu'une base de E.
   Puisque ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ vers E, on a $\boxed{\dim E = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n + 1.}$
   On sait de plus que l'image d'une base de l'espace de départ par un isomorphisme est une base de l'espace d'arrivée.
   Donc $\left(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n)\right)$ est une base de E.
   Autrement dit : $\boxed{\left(W, XW, X^2W, \ldots, X^nW\right) \text{ est une base de } E.}$

3. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.
On admet que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Démontrer que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, le degré de $\Delta(X^k)$ est égal à $k-1$.

$$\begin{aligned}\Delta(X^k) &= (X+1)^k - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i 1^{k-i} - X^k \\ &= \binom{k}{k} X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i - X^k \\ &= X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le degré de ce polynôme est bien } k-1 \text{ car son terme dominant est } \binom{k}{k-1} X^{k-1}}$$

4. On définit l'application f définie sur E par : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$.

(a) Justifier, sans aucun calcul, que f est un endomorphisme de E.
ϕ, Δ et ϕ^{-1} sont linéaires donc f est linéaire.
$\phi \;:\; \mathbb{R}_n[X] \to E$ donc $\phi^{-1} \;:\; E \to \mathbb{R}_n[x]$.
Donc on a le schéma suivant :

$$E \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}_n[x] \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_n[x] \xrightarrow{\phi} E.$$

Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

(b) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(W)$.
Cette question était vraiment très difficile car elle demandait beaucoup d'habitude et notamment de connaître l'exercice classique consistant à montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) = P(X)\} = \mathbb{R}_0[X]$.

$$\begin{aligned}P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = 0 \\ &\iff \phi\Big(\Delta(\phi^{-1}(P))\Big) = 0 \\ &\iff \Delta(\phi^{-1}(P)) \quad \text{car } \phi \text{ est injective} \\ &\iff \phi^{-1}(P) \in \operatorname{Ker} \Delta\end{aligned}$$

Or $\operatorname{Ker} \Delta = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) - P(X) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) = P(X)\}$
Ainsi si $P \in \operatorname{Ker} \Delta$, on a pour tout n, $P(0) = P(0+1) = P(1) = P(1+1) = P(2) = \dots$ et donc de proche en proche, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n) = P(0)$.
Donc le polynôme $P(X) - P(0)$ admet alors une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul, donc $P(X) = P(0)$.
Ainsi tout polynôme de $\operatorname{Ker} \Delta$ est constant.
Donc $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.
On revient à notre calcul.

$$\begin{aligned}P \in \operatorname{Ker} f &\iff \phi^{-1}(P) \in \operatorname{Ker} \Delta \\ &\iff \phi^{-1}(P) \in \mathbb{R}_0[X] \\ &\iff \phi^{-1}(P) = c \in \mathbb{R} \\ &\iff P = \phi(c), \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \\ &\iff P = cW, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(W)}$

(c) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k W) = W\Delta(X^k)$.

$$\begin{aligned} f(X^k W) &= \phi\Big(\Delta(\phi^{-1}(X^k W))\Big) \\ &= \phi\Big(\Delta(X^k)\Big) \\ &= W\Big(\Delta(X^k)\Big) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ f(X^k W) = W\Delta(X^k).}$

(d) En déduire que $\Big(W\Delta(X), \ldots, W\Delta(X^n)\Big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

On a vu que $\Big(W, XW, X^2W, \ldots, X^nW\Big)$ est une base de E donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\Big(f(W), f(XW), f(X^2W), \ldots, f(X^nW)\Big) \\ &= \operatorname{Vect}\Big(W\Delta(1), W\Delta(X), W\Delta(X^2), \ldots, W\Delta(X^n)\Big) \\ &= \operatorname{Vect}\Big(0, W\Delta(X), W\Delta(X^2), \ldots, W\Delta(X^n)\Big) \quad \text{car } \Delta(1) = 0 \\ &= \operatorname{Vect}\Big(W\Delta(X), W\Delta(X^2), \ldots, W\Delta(X^n)\Big) \end{aligned}$$

Autrement dit $\Big(W\Delta(X), W\Delta(X^2), \ldots, W\Delta(X^n)\Big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ or, d'après la question 3 cette famille est échelonnée en degré, donc libre donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$. Donc

$\boxed{\Big(W\Delta(X), W\Delta(X^2), \ldots, W\Delta(X^n)\Big) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f.}$

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

1. Montrer que lorsque $x \geq 1$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ diverge vers $+\infty$

   Soit $x \geq 1$.
   On a $\frac{x^k}{k} \geq \frac{1}{k}$ qui est le terme général d'une série divergente (la série de Riemann avec $\alpha = 1$) donc, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ diverge vers } +\infty.}$

   Autre raisonnement possible, peut-être plus simple :
   Si $x > 1$, $\frac{x^k}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ par croissance comparée donc $\sum \frac{x^k}{k}$ diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.
   Si $x = 1$, $\frac{x^k}{k} = \frac{1}{k}$ or $\sum \frac{1}{k}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$).
   Donc dans les deux cas, $\sum \frac{x^k}{k}$ diverge. Et elle diverge vers $+\infty$ car c'est une série à termes positifs.

2. **Étude plus approfondie du cas $x = 1$.**
   On suppose maintenant que $x = 1$. On va donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche S_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur

   ```
   n=input('entrez une valeur pour n :')
   x=[1:n]
   S=________________
   disp(S)
   ```

   ```
   n=input('entrez une valeur pour n :')
   x=[1:n]
   S=sum(1./x)  \\ noter la division pointee qui est primordiale ici !!
   disp(S)
   ```

   (b) Justifier que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
   C'est une question ultra classique qui revient très régulièrement dans les concours !!
   On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ln$ entre k et $k+1$. On a $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ or pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.
   Donc, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln' t \leq \frac{1}{k}$.
   Donc, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \quad \text{(d'après la question 2b)} \\ &\geq \ln(n+1) - \ln 1 \quad \text{(somme télescopique)} \\ &\geq \ln(n+1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln k \quad \text{(d'après la question 2b)} \\ &\leq 1 + \ln(n) - \ln 1 \quad \text{(somme télescopique)} \\ &\leq 1 + \ln n \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n.}$

(d) En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

$$\begin{aligned} \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n &\iff \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1+\ln n}{\ln n} \\ &\iff \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1 \\ &\iff \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1 \\ &\iff 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1 \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} + 1 = 1$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$.

On a donc bien $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$

3. Dans cette question, on prend $x \in [0;1[$.

(a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0;x]$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{1-t^n}{1-t}$ car $x \neq 1$.

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \, \mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \\
&= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}
\end{aligned}$$

on a donc bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t.}$

(c) Montrer que $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t = 0$.

On a pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$.
Donc, en intégrant sur $[0, x]$ (car $0 \leq x$) :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t.}$$

Or $\frac{1}{1-x} \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc, par encadrement, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t = 0.}$

(d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ est convergente et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

C'est immédiat avec les deux questions précédentes !