Chapitre 24

Intégrales généralisées

Table des matières

1 Intégrales généralisées

1.1 Introduction

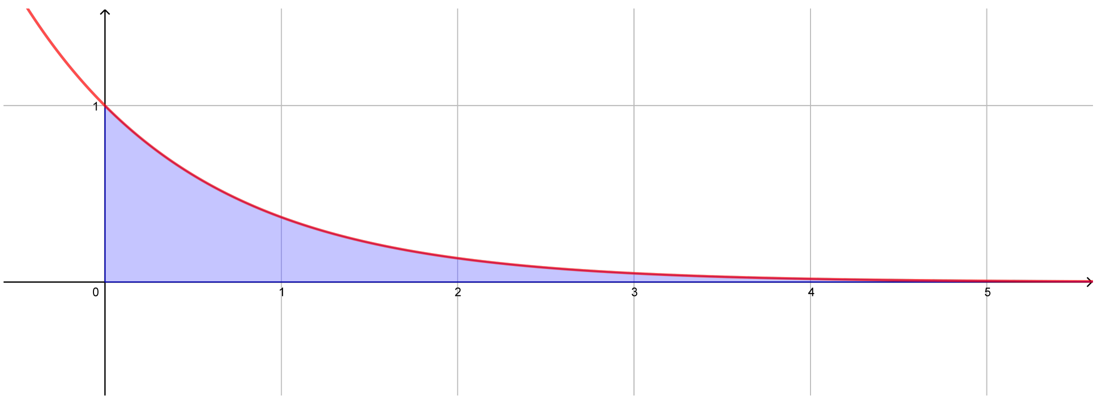
Dans ce chapitre, on va donner un sens à des intégrales comme celles-ci :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-t)^2}\ \mathrm{d}t$

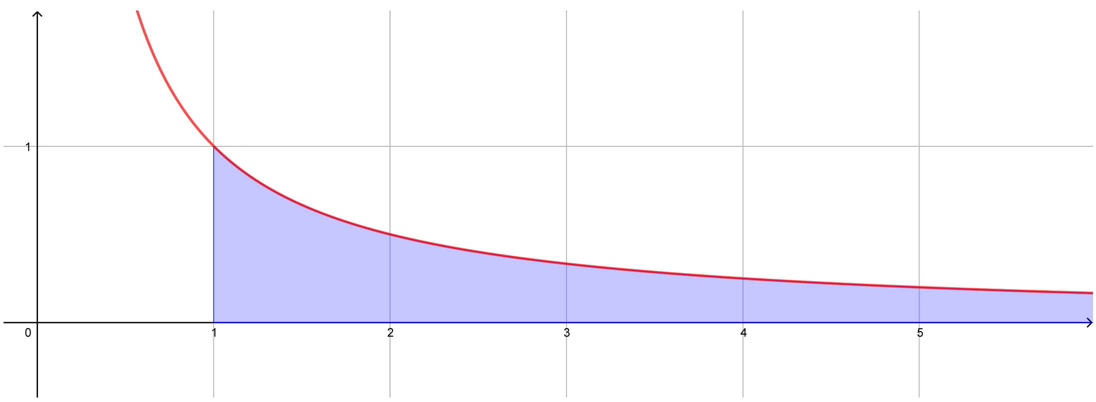
Pourquoi ces intégrales n'ont, pour l'instant, pas de sens pour nous ?

- La première et la deuxième ont une borne infinie : nous n'avons pas donné un sens à une telle intégrale.
- La troisième est une intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction qui est définie et continue sur $[0,1[$ mais qui n'est pas définie en 1 et même dont la limite en 1 vaut $+\infty$!

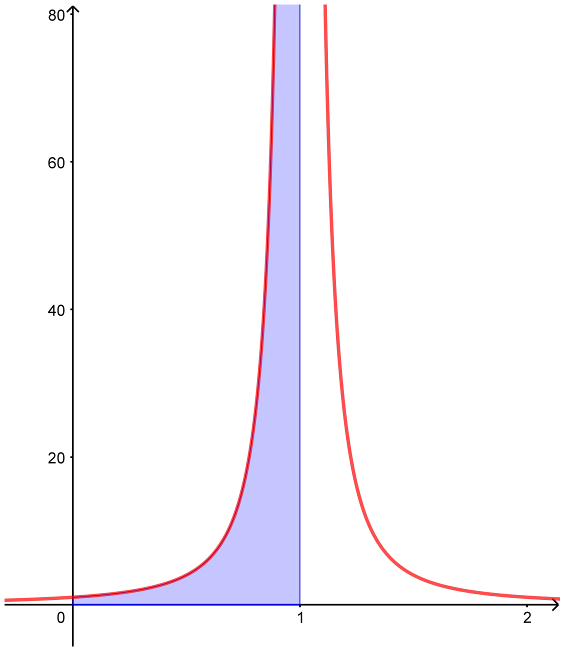
En terme d'aire, il s'agit donc d'aire de domaines infinis :
Pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t$, il s'agit de l'aire du domaine colorié ci-dessous, qui n'est donc pas limitée par la droite :



Pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$, il s'agit de l'aire du domaine colorié ci-dessous, qui n'est pas non plus limité par la droite :



Pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$, il s'agit de l'aire du domaine colorié ci-dessous, qui n'est pas limité par le haut :



Le point commun entre ces trois intégrales est que ce sont des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) d'une fonction définie et continue sur $[a, b[$, mais pas définie en b ! On va donner un sens à ces intégrales qu'on dira "généralisées en b".

1.2 Définitions et premiers exemples

Définition 1. (Intégrale généralisée en sa borne supérieure)
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **généralisée (ou impropre) en b.**

On dit que cette intégrale généralisée **converge** si la limite $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la limite est infinie ou n'existe pas, **on dit que cette intégrale généralisée diverge**.
Déterminer la nature d'une intégrale généralisée, c'est détermine si elle converge ou si elle diverge.

Exemple 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$

Remarque. On définit de la même manière des **intégrales généralisées en leur borne inférieure**.

Exemple 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t \, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$

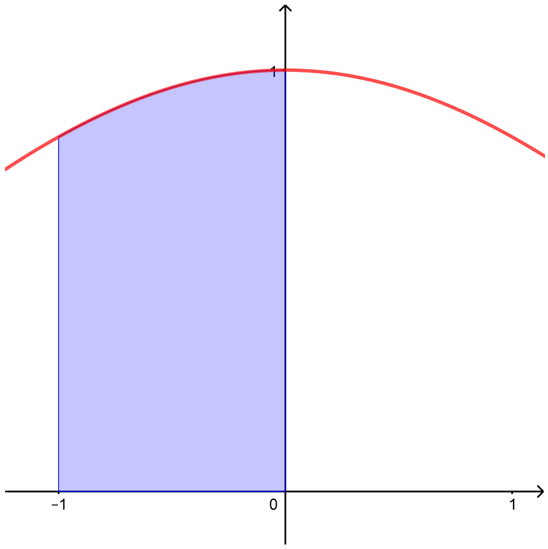
Définition 2. (Intégrale généralisée en ses deux bornes)
Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ est **généralisée (ou impropre) en a et b.**

On dit que cette intégrale généralisée **converge** si, pour tout $c \in]a, b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t$ convergent. Sa valeur est alors égale à la somme de ces deux intégrales. On peut montrer que le résultat ne dépend pas du choix de c.

Exemple 3. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

1.3 Intégrales "faussement" généralisées

Il peut arriver qu'une fonction soit définie et continue sur $[a, b[$, avec b réel, et non définie en b, mais qu'elle admette une limite finie en b. C'est par exemple le cas de la fonction f définie sur $[-1, 0[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est généralisée mais on sait que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. On peut donc prolonger cette fonction par la valeur 1 en 0. Graphiquement le domaine sous la courbe entre 0 et 1 est fini et donc l'aire est finie elle aussi. On parle alors d'**intégrale faussement généralisée** :



Proposition 1. (Intégrale faussement généralisée en sa borne inférieure.)
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ qui admet une limite en b (donc que l'on peut prolonger par continuité en b). Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 4.
Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On définit de la même manière et on a un résultat similaire pour les intégrales faussement généralisées en leur borne inférieure.

2 Intégrales de référence

Il faut connaître par coeur ces intégrales de références et connaître également leur preuves qui sont particulièrement simples.

Proposition 2. (Intégrales de Riemann en 0 et en $+\infty$)

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve de la proposition 2

1. Si $\alpha \neq 1$, soit $x \in]1, +\infty[$.
   $$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$
   - Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$ d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut$-\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$).
   - Si $\alpha < 1$, alors $1-\alpha > 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$ d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Si $\alpha = 1$, soit $x \in]1, +\infty[$.
   $$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \text{ donc } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$
2. Si $\alpha \neq 1$, soit $x \in]0, 1[$.
   $$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
   - Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$ et donc $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1-\alpha} = +\infty$ d'où $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.
   - Si $\alpha < 1$, alors $1-\alpha > 0$ et donc $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1-\alpha} = 0$ d'où $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut $\dfrac{1}{1-\alpha}$).

   Si $\alpha = 1$, soit $x \in]0, 1[$.
   $$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty, \text{ donc } \int_0^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

Proposition 3. (Intégrales de Riemann en les autres bornes)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
$$\int_a^b \frac{1}{(t-b)^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.$$

Proposition 4. ($\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$)
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.$$

Preuve de la proposition 4

Si $\alpha \neq 0$, soit $x \in]0, +\infty[$.
$\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} - \frac{1}{-\alpha} = 1 - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$.

Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{=} + \infty$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ diverge.

Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{=} 0$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ converge.

Si $\alpha = 0$, soit $x \in]0, +\infty[$.
$\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x\ \mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ diverge.
(*retour à la proposition 4*)

3 Propriétés et calcul d'intégrales généralisées

Les différentes propriétés des intégrales généralisées sont les mêmes que pour les intégrales sur un segment, à savoir : linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.

Proposition 5. (Fonction positive d'intégrale nulle.)
Soit f continue et positive sur $[a, b[$ et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors $\forall t \in [a, b[, f(t) = 0$.

Comment faire une intégration par partie ou un changement de variable pour une intégrale généralisée ?

1. Vérifier la convergence de l'intégrale avant de se lancer dans des calculs longs et fastidieux !
2. Poser $x \in]a, b[$ et faire tous les calculs sur le segment $[a, x]$ (respectivement $[x, b]$).
3. Passer à la limite lorsque x tend vers b (respectivement vers a)

Exemple 5.

1. Calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 t \ln t\ \mathrm{d}t$.
2. Calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{t})^n}{t^2}\ \mathrm{d}t$ en faisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

4 Critères de convergence

4.1 Combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Proposition 6. (Multiplication par un réel non nul d'une intégrale généralisée)
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
$\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature. Et, en cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Proposition 7. (Combinaison linéaire d'intégrales convergente)
Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $[a, b[$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f_1(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f_2(t)\ \mathrm{d}t$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\ \mathrm{d}t = \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\ \mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Autrement dit : *Une combinaison linéaire d'intégrales convergentes est convergente.*

Remarque. La proposition ci-dessous s'étend à une combinaison linéaire de n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

–> Voir l'exemple 7 pour une application de ces propositions.

4.2 Caractérisation de convergence pour les fonctions positives.

Proposition 8. (Caractérisation de convergence pour les fonctions positives.)
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

4.3 Critères de convergence.

Proposition 9. (Critère de comparaison des fonctions positives.)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b. On suppose qu'**au voisinage de** b, $f(t) \leq g(t)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. Le deuxième point ci-dessus n'est que la contraposée du premier.

Proposition 10. (Critère d'équivalence des fonctions positives)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et positives au voisinage de b.

Si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.

Proposition 11. (Critère de négligeabilité devant une fonction positive)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et g positive au voisinage de b (f est de signe quelconque).

$$\text{Si } f(t) \underset{b}{=} o(g(t)) \text{ et que } \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge alors } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exemple 6.
Montrer la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

Exemple 7. Un grand classique

1. Montrer que pour tout entier k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge.
2. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge.

4.4 Convergence absolue.

Définition 3. (convergence absolue)
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

Proposition 12. (La convergence absolue entraine la convergence)
Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle converge.

Intérêt : si jamais on a une intégrale généralisée d'une fonction non positive, on peut regarder la convergence absolue et utiliser les différents critères de convergence sur $|f|$ pour en déduire la convergence...
Mais cette année, la plupart des intégrales généralisées étudiées seront des intégrales de fonctions positives.

Exemple 8.
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\ \mathrm{d}t$.