# Feuille d'exercices n°24 – Intégrales généralisées

**Exercice 1 .**

Nature des intégrales suivantes et en cas de convergence, calcul de la valeur :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u}du$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+2)^2}dt$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$, $\beta > 1$ i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}})dx$

**Exercice 2 .**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

1. Etudier la parité de $f$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ puis préciser sa valeur.
3. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ ?

**Exercice 3 .**

**1.** A l'aide du changement de variable proposer, montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx \ (y = e^x)$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \ (x = t^2)$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t}dt \ (u = e^t)$

**2.**

(a) A l'aide du changement de variable $u = t^2$, calculer $\int_1^x \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}dt$ pour $x \geq 1$.

(b) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.
On commencera par faire une intégration par parties ...

**Exercice 4 .**

Nature des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ e) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

f) $\int_0^1 \frac{y-1}{\ln y}dy$ g) $\int_0^1 \ln x dx$ h) $\int_1^{+\infty}(\ln(u+1) - \ln u)du$ i) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}dx$ j) $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}dx$

**Exercice 5 .**

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge et vaut 1.
2. Nature et calcul de $\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt$ pour $\alpha > -1$.

**Exercice 6 .**

Calculer pour tout $x \geq 0$, $\int_{-x}^{x} \sin t\,dt$. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,dt$ ?

**Exercice 7 .** Une intégrale simplement convergente.

1. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt$
2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}dt$ converge. *On pourra s'inspirer des questions 1. et 2.*
4. Montrer alors que pour tout réel $t$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$ puis que $|\sin t| \geq \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
5. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ ne converge pas absolument.

**Exercice 8 .**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ converge.
2. Calculer $I_0$ et $I_1$.
3. Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
4. En déduire la valeur de $I_n$ en fonction de $n$.
5. Montrer la convergence et préciser la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x}dx$.

**Exercice 9 .**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n$ converge.
2. Calculer $I_1$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\times((n-1)!)^2}\pi$.

**Exercice 10 .**

Le but est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ : soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de $u_n$, puis calculer $u_0$ et $u_1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. (a) ** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (b) Donner la limite de la suite $(u_n)$
4. (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $v_n$ pour tout $n \geq 2$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$ puis conclure.