Chapitre 25

# Variables Aléatoires Continues

## Table des matières

# 1 Généralités

**Définition 1. (Variable aléatoire à densité)**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire réelle. On dit que $X$ est une variable à densité si sa fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf eventuellement en un nombre fini de points.
Toute fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives telle que $f_X(t) = F'_X(t)$ pour tout réel $t$ sauf éventuellement en un nombre fini de points est appelée densité de $X$.

En pratique, pour déterminer une densité $f_X$, on lui attribue des valeurs arbitraires en les points où $F_X$ n'est pas dérivable.

**Proposition 1. (Caractérisation des fonctions de répartition d'une variable à densité)**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes

1. $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. $F$ est continue sur $\mathbb{R}$
4. $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

Alors $F$ est la fonction de répartition d'une variable à densité.

**Remarque.** **Attention :** Si on sait déjà que $F$ est une fonction de répartition, il suffit de montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

**Exemple 1.**

Soit $X$ une variable aléatoire telle que $F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t \end{cases}$.

Vérifier que $X$ est une variable à densité et déterminer une densité de $X$.

**Proposition 2. (Propriétés Fondamentales ***)**
Soit $X$ une variable à densité de fonction de répartition $F_X$ et de densité $f_X$ :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ \mathrm{d}t = 1$
3. $P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\ \mathrm{d}t$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$
5. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$,

$$P(x \leq X \leq y) = P(x < X \leq y) = P(x < X < y) = P(x \leq X < y) = F_X(y) - F_X(x) = \int_{x}^{y} f_X(t)\ \mathrm{d}t$$

**Proposition 3. (Caractérisation des densités ***)**
Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f$ est positive sur $\mathbb{R}$
2. $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$ converge et vaut $1$

est la densité d'une variable aléatoire.

**Exemple 2.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in ]0,1[ \\ \dfrac{\lambda}{x\sqrt{x}} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ Déterminer $\lambda$ pour que $f$ soit une densité d'une variable aléatoire $X$ puis représenter $f$. Ensuite, déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$ puis représenter la courber de $F_X$.

# 2 Transformation d'une variable à densité

## 2.1 Transformation affine d'une variable à densité

**Proposition 4. (Transformation affine d'une variable aléatoire à densité)**
Soit $X$ une variable aléatoire à densité, de densité $f_X$ et de fonction de répartition $F_X$ que l'on supposera $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Alors pour tous réels $a, b$ avec $a \neq 0$, la variable $Y = aX + b$ est une variable à densité et on peut obtenir sa densité et sa fonction de répartition

**Remarque.** Volontairement, on n'a pas mis les formules donnant la densité et la fonction de répartition de $Y$ en fonction de celles de $X$ car il vaut mieux ne pas les apprendre par coeur et refaire le raisonnement ci-dessous à chaque fois

Preuve de la proposition 4

cas où $a > 0$ : $F_Y(t) = P(aX + b \leq t) = P(X \leq \dfrac{t-b}{a}) = \boxed{F_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right)}$.

Par composition de fonctions continues et $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $Y$ est une variable à densité et on obtient par dérivation $\boxed{f_Y(t) = \dfrac{1}{a} f_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right)}$

cas où $a < 0$ : $F_Y(t) = 1 - F_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$ et $f_Y(t) = -\dfrac{1}{a} f_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$.

## 2.2 Transformation quelconque d'une variable à densité.

Dans cette partie, on va étudier un problème qu'on rencontrera souvent souvent : on a une variable aléatoire à densité $X$ et une fonction $g$ qui est une bijection. On pose $Y = f(X)$. Le but est de montrer que - sous les conditions de l'énoncé - $Y$ est elle aussi une variable à densité et de déterminer sa densité. Pour cela on passe par la fonction de répartition $F_X$ de $X$ et on a besoin de la proposition suivante, qui est assez naturelle.

**Méthode à retenir nº 1**

**Obtenir la densité de $Y = f(X)$**

1. Première chose à faire, déterminer $Y(\Omega)$. Si ce n'est pas immédiat, il suffit d'étudier la fonction $f$ avec pour ensemble de départ $X(\Omega)$. Un tableau de variation donne l'ensemble d'arrivée, donc $Y(\Omega)$.
2. On sait désormais que pour les $t$ à gauche de $Y(\Omega)$, on a $F_Y(t) = 0$ et pour les $t$ à droite $F_Y(t) = 1$.
3. On prend $t \in Y(\Omega)$ et on se ramène à la fonction de répartition de $X$ à l'aide de la méthode suivante :
   - Si $f$ est croissante :
   $$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(f(X) \leq t) \\ &= P\left(X \leq f^{-1}(t)\right) \quad \text{car la fonction } f^{-1} \text{ est strictement croissante sur } Y(\Omega) \\ &= F_X\left(f^{-1}(t)\right) \end{aligned}$$
   - Si $f$ est décroissante :
   $$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(f(X) \leq t) \\ &= P\left(X \geq f^{-1}(t)\right) \quad \text{car la fonction } f^{-1} \text{ est strictement décroissante sur } Y(\Omega) \\ &= 1 - P\left(X < f^{-1}(t)\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq f^{-1}(t)\right) \quad \text{car } X \text{ est une fonction à densité (et donc } P\left(X = f^{-1}(t)\right) = 0 \\ &= 1 - F_X\left(f^{-1}(t)\right) \end{aligned}$$

   *Il faut systématiquement refaire ce raisonnement en le justifiant proprement.*
4. Une fois qu'on a obtenu l'expression de $F_Y$ sur $Y(\Omega)$, il suffit de dériver pour obtenir la densité $f_Y$.

**Exemple 3.**
Soit $X$ une variable aléatoire à densité telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et de fonction de répartition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \ln(1 + |X|)$.

1. On remarque que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$
2. On en déduit que $\forall t < 0,\ F_Y(t) = 0$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(\ln(1+|X|) \leq t) \\ &= P(1+|X| \leq e^t) \qquad \text{car l'exponentielle est une bijection croissante} \\ &= P(|X| \leq e^t - 1) = P(1-e^t \leq X \leq e^t - 1) \qquad \text{car } t \geq 0 \\ &= F_X(e^t-1) - F_X(1-e^t) \end{aligned}$$

Par composition de fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $Y$ est une variable aléatoire à densité et par dérivation on obtient

$$f_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^t(f_X(e^t-1) + f_X(1-e^t)) & \text{sinon} \end{cases}$$

## 3 Espérance et variance d'une variable à densité

**Définition 2. (Espérance)**
Soit $X$ une variable à densité, de densité $f_X$. On dit que $X$ admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge **absolument** et dans ce cas on note $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ son espérance.

**Exemple 4.** Reprendre les exemples 1 et 2 et déterminer si l'espérance existe. Déterminer le cas échéant sa valeur.

**Proposition 5. (Linéarité de l'espérance)**
Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une espérance. Alors pour tous réels $a$,$b$,, la variable $aX+b$ admet une espérance et $E(aX+b) = aE(X)+b$.

**Définition 3. (Variance)**
Soit $X$ une variable à densité, de densité $f_X$. On dit que $X$ admet une variance si $X^2$ admet une espérance, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge **absolument** et dans ce cas on a $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

## 4 Lois usuelles

**Définition 4. (Loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$.)**
Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que $X$ suit la loi uniforme sur $[a,b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, si $X$ est une variable à densité $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

La fonction de répartition est donc $F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} \text{ si } a \leq t \leq b \\ 1 \text{ si } t > b \end{cases}$

**Proposition 6. (Espérance de la loi uniforme)**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $X$ admet une espérance et $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

**Définition 5. (Loi exponentielle)**
Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\lambda > 0$. On dit que $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si $X$ est une variable à densité $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

La fonction de répartition est donc $F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

**Proposition 7. (Espérance de la loi exponentielle)**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X$ admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

**Proposition 8. (Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire)**
Soit $X$ une variable **à densité** à valeurs positives telle que $\forall t > 0, P(X > t) > 0$. On dit que la loi de $X$ est une loi sans mémoire si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, P_{X>y}(X > y + x) = P(X > x)$.
La loi de $X$ est une loi sans mémoire si et seulement si $X$ suit une loi exponentielle.

**Définition 6. (Loi Normale)**
Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que $X$ suit la loi normale centrée de paramètre $(\mu, \sigma^2)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si $X$ est une variable à densité $\phi(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

La fonction de répartition est donc $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \phi(s) \, \mathrm{d}s$.

**Proposition 9. (Espérance de la loi normale)**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $X$ admet une espérance et $E(X) = \mu$.

**Remarque.** On manipulera souvent la loi normale centrée réduite : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.