Feuille d'exercices n°25 – Variables Aléatoires Continues

Exercice 1:

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant une densité associée. *En bonus :* existence et calcul de l'espérance.

$F_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad F_2(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (pour l'esp., vq la densité choisie est paire)

Exercice 2:

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des densités d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant la fonction de répartition associée. *En bonus :* existence et calcul de l'espérance.

$f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_3(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f_4(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_6(x) = \sin x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{x^2+1}$.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.
   On introduit alors une variable aléatoire X de densité f : on dit que X suit la loi de Cauchy.
2. X admet-elle une espérance ?
3. Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{\pi} Arctan(x) + \frac{1}{2}$.

Exercice 4: *pour s'entraîner*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 5:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$ et on admet que Y est bien une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition notée G de Y
   (b) Montrer alors que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.
   (c) Mêmes questions avec $Z = X^2$.

Exercice 6: *pour s'entraîner*

Reprendre l'énoncé de l'exercice précédent avec $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Y = \ln X$.

Exercice 7 . (EDHEC 2018 – Clermont)

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

(1) Etudier la parité de f.

(2) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

(3) (a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
   (b) Montrer que X possède une variance.

(4) On note F la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

(5) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Déterminer explicitement $F(x)$ pour tout réel x.
   (c) Etablir que la fonction F^{-1}, bijection réciproque de F, est définie par :
   $$\forall x \in]0, 1[, \; F^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$
   (d) En déduire un script Scilab permettant de simuler la variable aléatoire X.

Exercice 8 .

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1,1[)$, $Z = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+X}{1-X})$ et g la fonction définie sur $]-1,1[$ par $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

1. Rappeler une densité f de X, sa fonction de répartition F, ainsi que la valeur de son espérance.
2. (a) Montrer que g réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations de g^{-1}.
   (b) Déterminer g^{-1}. En déduire la fonction de répartition de Z.
   (c) Vérifier que Z est une variable à densité, et préciser une densité de Z.

Exercice 9 .

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Reconnaître la loi de $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ (où $\lambda > 0$).
Application scilab : à l'aide de la syntaxe `rand()`, simuler une loi exponentielle de paramètre 5.

Exercice 10 .

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet que $T = X^2$, et $U = \lfloor X \rfloor + 1$ sont bien des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé que X.

1. Rappeler une densité de X, sa fonction de répartition, ainsi que la valeur de son espérance.
2. Vérifier que T est bien une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
3. Reconnaître la loi de U. En déduire son espérance.

Exercice 11 .

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Vérifier que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X. On note F sa fonction de répartition.(On ne calculera pas F).
2. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Exprimer la fonction de répartition de Y, notée G en fonction de F.
   (b) En déduire que Y est une variable à densité, et exprimer sa densité en fonction de f.
   (c) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 12 .

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}dx$.

Exercice 13 .

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On admet que $Y = e^X$ est une variable aléatoire.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. ** Montrer que Y admet une espérance et la calculer (on pensera à un changement de variable).